Facultad de Ciencias, UNAM

Geometría Moderna I

Notas de clase

Ma. Guadalupe Lucio Gómez Maqueo

Febrero 2013

La intención de estas notas es la de servir para el curso de Geometría Moderna I. En ellas se abordan algunos aspectos históricos del desarrollo de la geometría elemental y sus conceptos básicos.

Al impartir este curso se ha observado que cuando se abordan los temas elementales de geometría como un repaso de lo visto por los estudiantes en cursos anteriores, les resulta poco interesante e incluso prestan poca atención considerando que es algo que ya saben, sea cierto o no.

Es por ello que se han desarrollado estas notas en las que se ofrecen algunos antecedentes históricos y con un enfoque basado en construcciones geométricas, que supone permitirá revisar estos temas elementales, pero en una forma que se espera resulte más atractiva para los estudiantes.

Ya que el tema es muy extenso, se incluyen ejercicios que complementan el texto, por lo que se recomienda al lector que los lleve a cabo, ya que los resultados propuestos en ellos forman parte la experiencia geométrica proyectada para el estudiante.

La primera versión de estas notas fue realizada en agosto de 2010. Agradezco a los estudiantes de los cursos anteriores sus observaciones que han permitido ir puliendo las mismas.

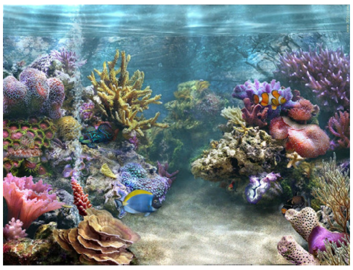
Las figuras, con excepción de las gráficas de las funciones trigonométricas, fueron generadas con el programa GeoGebra, programa con Licencia Pública General de GNU.

1. Conceptos básicos

1.1. La Geometría prehelénica

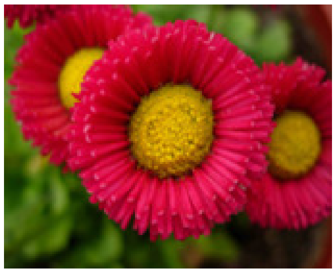
Se ha dicho que el desarrollo de la ciencia es una sucesión de preguntas y problemas y de las propuestas de respuesta o solución a los mismos.

Las preguntas y problemas cambian a través de la historia y las respuestas o soluciones que se formulan evolucionan de acuerdo con el conocimiento disponible en ese momento.

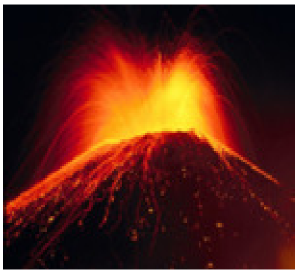


A nuestro alrededor, la naturaleza toma una infinidad de formas. La capacidad del ser humano para descubrirlas, para abstraerlas y para buscar soluciones a diversos problemas sobre las formas, es lo que impulsó el desarrollo de la geometría .

Una de las formas que se presenta con mayor frecuencia en la naturaleza es la *esfera*, cuerpo geométrico en el cual los puntos de su superficie equidistan de un punto fijo.



Otra forma muy presente en la naturaleza es el *círculo*, figura geométrica plana cuyos puntos equidistan de un punto fijo. Una característica del círculo es que entre todas las curvas cerradas en el plano que encierran un área fija, el círculo es el de menor perímetro.



Los volcanes generalmente son de *forma cónica* que es modelada por la presión del magma así como de la acumulación de material de erupciones anteriores.

Se denomina *cono* a toda superficie conformada por un conjunto de rectas que tienen un punto común llamado vértice y que intersecan a una circunferencia que no está en el mismo plano. Los conos son superficies regladas ya que se pueden generar por una recta que se desplaza sobre un círculo

Otra de las formas que se encuentran frecuentemente en la naturaleza es la *espiral*. Una espiral es una curva plana que da vueltas alrededor de un punto y que en cada vuelta se aleja más del punto.

Esto es, la espiral es una curva plana generada por un punto que se va alejando progresivamente del centro a la vez que gira alrededor de él.

Ilustración 1.1

Es por ello, que para el estudio de la ciencia, y en nuestro caso de la geometría, hacer algunas referencias sobre su desarrollo histórico parece obligado.

La vieja definición de las matemáticas como la "ciencia del número y la magnitud", no corresponde ya con su carácter y desarrollo actual, pero nos permite ver cuáles fueron sus inicios.

La geometría, de acuerdo con el origen mismo de su nombre, surge para resolver una serie de problemas prácticos y en su forma más elemental, se ocupa de problemas métricos como el cálculo del área y perímetro de figuras planas y de la superficie y volumen de cuerpos sólidos

En esta sección no se pretende dar un panorama completo de la historia de la geometría, sino dar una mirada a la naturaleza de los antecedentes de la geometría prehelénica, por lo que se referirán solamente a dos de los más importantes hogares culturales de la antigüedad: Mesopotamia y el Valle del Nilo. En ellos se desarrollaron las civilizaciones babilónica y la egipcia las cuales, de acuerdo con los registros históricos de que se dispone, contaban ya con una forma de escritura alrededor del año 3000 a.C.

El historiador griego Herodoto (siglo V a.C.), da crédito a los egipcios sobre la invención de la agrimensura refiriendo que fue usada para encontrar la distribución adecuada de la tierra después de los desbordamientos anuales del Nilo. Asimismo, se refiere que el interés por conocer los volúmenes de figuras sólidas obedecía a la necesidad de evaluar los tributos, almacenar aceite y grano y construir presas y templos.

Los registros más importantes con los que se cuenta de la civilización egipcia son el papiro de Rhind o de Ahmes y el de Moscú, los dos en escritura hierática y con dimensiones aproximadas de seis metros de largo los dos, por treinta centímetros de ancho el primero y de 7 el segundo.

El papiro de Rhind fue escrito aproximadamente en 1650 a.C., a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica el escriba Ahmes al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes del papiro corresponden a estos textos anteriores.

Es una colección de ejercicios matemáticos y ejemplos prácticos. Contiene 85 problemas.

Muestra el uso de fracciones, la resolución de ecuaciones simples y de progresiones, la medición de áreas de triángulos, trapezoides y rectángulos, el cálculo de volúmenes de cilindros y prismas, y por supuesto de la superficie del círculo.

El problema 51 muestra que el área de un triángulo isósceles se encontraba tomando la mitad de la base y se multiplica por su altura. Ahmes sugiere que el triángulo isósceles se puede ver como dos triángulos rectángulos, de tal forma que moviendo uno de ellos de posición, se forme un rectángulo.

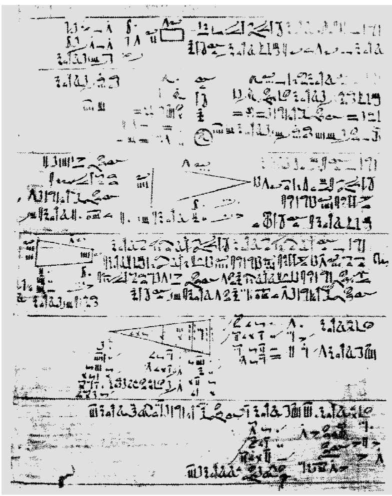


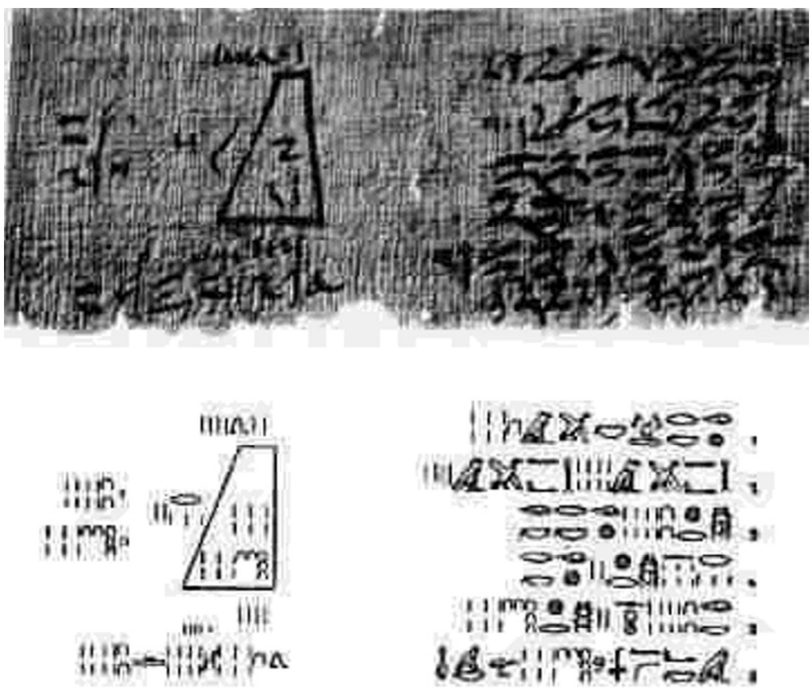
Imagen de http://www.physics.utoledo.edu/~ljc/rhind.html

Ilustración 1.2

En el caso del papiro de Moscú, también conocido como de Golenishchev, no se conoce registro sobre su autor y su antigüedad, se ubica por el año 1890 a.C. Tiene una colección de veinticinco problemas resueltos, sobre cuestiones cotidianas, no muy diferentes de los del papiro de Rhind.

De los 110 problemas que contienen estos dos registros, 26 son de carácter geométrico. El conocimiento que se obtiene a través de estos registros indica que los resultados consignados son de naturaleza empírica y que la realización de cálculos era su principal finalidad. Se considera que en los casos en que aparentemente surgen algunos elementos teóricos, como en el caso del problema 51 del papiro de Rhind, su finalidad era facilitar la técnica de cálculo más que establecer alguna regla general.

Sin embargo, del problema 14 del papiro de Moscú, se afirma que es uno de los logros más impresionantes de las matemáticas egipcias. Este problema está relacionado con la figura que se ve en el fragmento del papiro que se presenta en la Ilustración 1.3.



La base es un cuadrado que mide 4 codos[1] por lado, la tapa es un cuadrado cuyos lados miden 2 codos y la altura de la pirámide truncada es de 6 codos. Se requiere "calcular la pirámide", es decir "calcular el volumen de la pirámide". El cálculo inicia por determinar el área de la base: 4×4 = 16. Se encuentra el área de la tapa: 2×2 = 4. Después se computa el producto del lado de la base por el lado de la tapa: 4×2 = 8. Estos números se suman y se obtiene 28. Ahora se toma un tercio de la altura, es decir, 2. Finalmente se toman el producto de un tercio de la altura y 28 y el escriba anota: Miren que da 56.

[1] La principal unidad de medida de los antiguos egipcios era el codo, equivalente a 52.3cm

Imagen de: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/HistoriaImagen/Egipto.asp

Ilustración 1.3

De la civilización babilónica se conservan un amplio número de tabletas de barro en escritura cuneiforme, algunos autores mencionan hasta 500,000. Por supuesto que no todas se refieren a las matemáticas.

Los babilonios tenían un sistema numérico avanzado. Era un sistema posicional de base 60, en lugar del sistema de base 10 que es usado en la actualidad. Dividían el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Esta forma de contar ha sobrevivido durante 4000 años. Escribir 5h 25' 30', es decir, 5 horas, 25 minutos, 30 segundos, es equivalente a escribir la fracción sexagesimal 5 $^{25}/_{60}$ $^{30}/_{3600}$. Se adopta la notación 5;25,30 para este número sexagesimal.

Quizá el aspecto más sorprendente de la avanzada habilidad de cálculo babilónica es la construcción de tablas.

Dos tabletas halladas en Senkerah en 1854, que datan del año 2000 a. C., proporcionan los cuadrados de los números hasta el 59 y los cubos de los números hasta el 32.

La tableta da 8^2 =1,4, lo que significa:

$$8^2 = 1{,}4 = 1\times 60 + 4 = 64,$$

así, hasta 59^2 = 58,1 (58×60 + 1 = 3,481)[1].

En la ilustración 1.5 se revisa someramente el contenido de la tableta de Yale 7,289 de la colección babilónica Yale de la Universidad del mismo nombre.

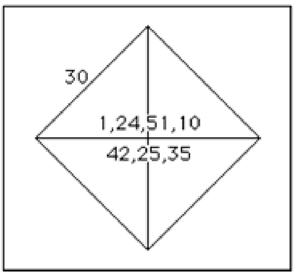
Tableta de Yale

http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc7289-2.html

Ilustración 1.4

[1] http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo.php?num=3625.

Diagrama de la
Tableta de Yale



Tiene sobre ella un diagrama de un cuadrado con 30 en un lado; dentro y cerca del centro de las diagonales está escrito 1,24,51,10 y 42,25,35.

Los números corresponden al sistema babilónico en base 60.

Suponiendo que el primer número es 1;24,51,10 y convirtiéndolo al sistema decimal se tiene 1.414212963, mientras que $\sqrt{2}$ = 1.414213562.

Calculando:
30 × [1;24,51,10] se obtiene 42;25,35 que es el segundo número.

La diagonal de un cuadrado de lado 30 se encuentra multiplicando 30 por la aproximación a $\sqrt{2}$.

Esto muestra la comprensión del teorema de Pitágoras. Sin embargo, es aún más significativa la aproximación a $\sqrt{2}$ tan asombrosamente buena.

Varios autores han conjeturado que los babilonios usaban un método equivalente al de Herón. Sugieren que empezaban por usar una primera aproximación (adivinando), digamos x. Después encontraban

$$e = x^2 - 2 \text{ que es el error.}$$

Entonces calculaban:

$$(x - e/2x)^2 = x^2 - e + (e/2x)^2,$$

lo que da una mejor aproximación ya que, si e es pequeño, entonces $(e/2x)^2$ será muy pequeño.

Continuando el proceso con esta nueva aproximación a $\sqrt{2}$ se logra una aproximación aún mejor y así sucesivamente.

Ilustración 1.5

Al respecto de la naturaleza y trascendencia de las matemáticas prehelénicas, *Howard Eves* anota en su libro *Estudio de las Geometrías*:

> "El razonamiento empírico puede describirse como la formulación de las conclusiones que se basan en la experiencia y en la observación; no está contenido ningún entendimiento real, y el elemento lógico no aparece. El razonamiento empírico contiene a menudo manipulaciones pesadas con casos especiales, observación de coincidencias y el empleo frecuente de la analogía, la experiencia a una buena suposición, la experimentación considerable y los destellos de intuición.
>
> A pesar de la naturaleza empírica de la matemática prehelénica, con su desprecio completo de la demostración y la aparentemente pequeña atención que se pone entre la verdad exacta y aproximada, uno, sin embargo, se asombra de la extensión y la diversidad de los problemas que atacaron con éxito. Evidentemente, gran parte de la verdad matemática elemental puede descubrirse por métodos empíricos cuando se complementa con experimentación extensa efectuada pacientemente durante largos periodos".

La geometría prehelénica pasa a Occidente a través de Grecia y es ahí donde adquiere el carácter deductivo; trasciende la práctica meramente empírica e inductiva de las civilizaciones egipcia y babilónica y da el gran salto cualitativo hacia una ciencia racional, es decir, se funda propiamente la Matemática como ciencia[2].

Como se ha dicho con anterioridad, las preguntas que se ha hecho el ser humano han ido cambiando a lo largo de la historia y las respuestas se han ido dando con base en el conocimiento acumulado; en el caso de los griegos, las preguntas se fueron transformando y ya no estuvieron referidas a objetos concretos sino geométricos. Los tres famosos problemas griegos: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo son ejemplo del tipo de problemas que atendía la geometría griega.

Ejercicios:

1) *¿Qué "fórmulas" conoce para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas? Si no las recuerda, consulte algunos libros de geometría elemental y haga un listado de ellas.*

2) *Calcule el volumen de la pirámide truncada del problema 14 del papiro de Moscú de acuerdo con la "fórmula" que para este fin aprendió en secundaria. Compare el resultado con el del papiro. ¿Considera que la regla que usaban los egipcios era correcta? ¿Por qué?*

[2] Para mayor información sobre este tema pueden consultarse los títulos 1, 2, 8, 10, 13 y 14 de la Bibliografía de consulta.

1.2. La Geometría Griega

Como ya se ha dicho el carácter de la geometría griega trasciende la práctica empírica de las civilizaciones babilónica y egipcia; de hecho, algunos autores consideran que no ha habido mayor contraste en las matemáticas que el paso de estas civilizaciones a los griegos, y se preguntan cómo explicar la divergencia entre la práctica antigua que no hacía diferencia entre la verdad exacta o aproximada, en la que las demostraciones eran inexistentes, y la geometría griega en la que se desarrolla un método lógico para demostrar las *verdades* geométricas. ¿Por qué no se desarrolló la geometría como una ciencia experimental?

Este hecho no se puede entender sin revisar algunos aspectos de la geometría griega, sin llegar a hacer un estudio detallado de la misma, lo cual llevaría mucho tiempo además de que su estudio va más allá de los objetivos de este curso.

Las fuentes de las que procede el conocimiento de la geometría griega más antigua son menos directas y fiables que las que se tienen de la matemática egipcia y babilónica, ya que no se ha contado, en general, con manuscritos originales de los matemáticos griegos de la época antigua, producto de la destrucción de sus bibliotecas.

Las fuentes principales de las obras griegas muy antiguas son los códices bizantinos manuscritos en griego, escritos entre 500 y 1500 años después de que fueron escritas las obras griegas originales. Estos códices fueron ediciones críticas, de manera que no se puede estar seguro de que tipo de cambios hicieron en su día los editores. También se ha contado con traducciones al árabe de las obras griegas, y de las versiones latinas de éstas; aquí, una vez más, no se sabe que cambios pueden haber realizado los traductores. Incluso, los textos griegos utilizados por los autores árabes y bizantinos pudieron muy bien ser de autenticidad dudosa.

Otra de las fuentes importantes para conocer la geometría griega es el *Comentario* sobre el libro I de Euclides de *Proclo* (siglo V). Este comentario incluye el llamado *Sumario de Eudemo,* un breve resumen de la geometría griega desde su inicio hasta Euclides, basado en la historia de la geometría de Eudemo de Rodas (320 a.C.), aún cuando no existe certeza sobre si Proclo tuvo acceso a este texto o a algún resumen elaborado posteriormente.

La primera referencia del Sumario es *Tales de Mileto*, quien fuera uno de los "siete hombres sabios de Grecia", el cual se calcula que vivió aproximadamente entre los años 624 a.C. a 548 a.C. Este cálculo se ha realizado a partir de la fecha de un eclipse de sol que se produjo en el año 585 a.C., que algunas fuentes refieren que Tales pronosticó.

Citando a Eudemo, Proclo afirma que Tales estableció cuatro teoremas:

- *El círculo se biseca por su diámetro.*
- *Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.*
- *Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersecan, son iguales.*
- *Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son iguales.*

Algunos de estos resultados eran conocidos desde bastante tiempo antes, lo importante es la creencia de que Tales usaba razonamiento lógico para hacer ver que eran ciertos y no lo hacía por medio de la intuición, la experimentación y la comprobación repetida, como en épocas anteriores se había hecho.

Hay un quinto teorema que tradicionalmente se incorpora a la lista anterior y que dice:

- *El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto*.

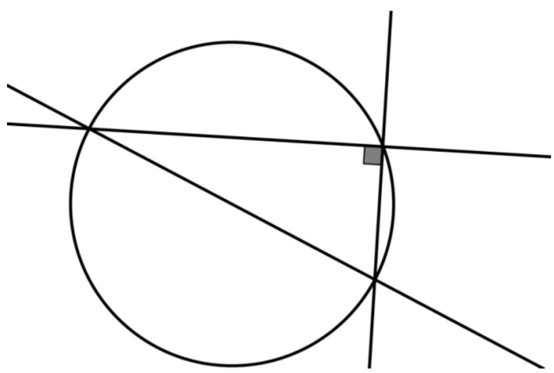


Figura 1.1

Este último resultado era ciertamente conocido por los babilonios aproximadamente en el 2600 a.C. Entre los resultados también atribuidos a Tales están el cálculo de la altura de las pirámides de Egipto, observando la longitud de sus sombras en el momento en que la longitud de la sombra de un gnomon era igual a su longitud, y el cálculo de la distancia de un barco a la playa a través de la proporcionalidad.

El gnomon se define como un palo o estilete vertical que proyecta su sombra sobre una superficie horizontal. El gnomon era parte fundamental de un reloj de sol.

Ilustración 1.6

http://astronomia2009.es/Proyectos_de_ambito_nacional/La_medida_del_Radio_de_la_Tierra/Documentacion:_Que_es_un_gnomon.html

Independientemente de que algunos de los resultados atribuidos a Tales eran conocidos con anterioridad y de que no se cuenta con evidencia alguna de sus razonamientos demostrativos, es claro que es él la primera persona a quien se atribuyen descubrimientos geométricos específicos y se estima razonable concluir, con base en las afirmaciones de Proclo, que Tales contribuyó para el avance en la dirección de la estructuración racional de la geometría.

El siguiente matemático célebre que es mencionado en el Sumario es *Pitágoras*, de quien se afirma continuó el camino de Tales en relación con el desarrollo del carácter racional de la geometría.

El nacimiento de Pitágoras se sitúa entre el 580 y 568 a.C. La escuela de los Pitagóricos, situada en Crotona, en las costas de Italia conocida en esa época como Grecia Magna, se extiende aproximadamente por dos siglos a partir del año del año 540 a. C. En ella se estudiaba filosofía y matemáticas. De hecho, los nombres de Filosofía y Matemáticas se atribuyen a Pitágoras.

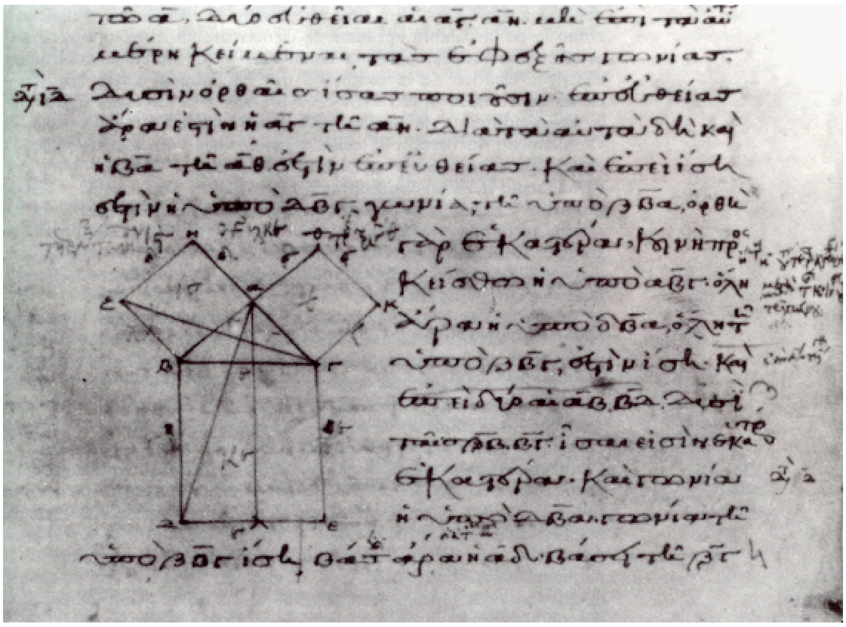
Se sabe poco de la vida personal de Pitágoras y de sus seguidores y no se puede tener certeza sobre cuales resultados hay que atribuirle a él personalmente y cuáles a sus discípulos, por el carácter comunitario y secreto de la hermandad de los Pitagóricos, así como por el hecho de que ninguna de las biografías sobre Pitágoras escritas en la antigüedad, entre ellas la de Aristóteles, se conservaron posteriormente.

Pitágoras era fundamentalmente un filósofo y reformador; las matemáticas constituían la base de su sistema filosófico y místico. Sus trabajos matemáticos estaban orientados a ofrecer un fundamento para su sistema filosófico que era la base de su enseñanza. Los Pitagóricos agrupaban los objetos matemáticos en cuatro cuerpos (quadrivium): números absolutos o aritmética, números aplicados o música, magnitudes en reposo o geometría y magnitudes en movimiento o astronomía.

Entre el conocimiento geométrico que se atribuye a los Pitagóricos está: el desarrollo de una teoría de las proporciones bastante completa, aunque limitada a segmentos conmensurables; la utilización de las propiedades de las paralelas para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos y algunas propiedades de polígonos y poliedros. Entre estas últimas cabe destacar el célebre teorema llamado de Pitágoras, que expresa la conocida relación entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Asimismo, se afirma que los Pitagóricos mostraron que el plano podía cubrirse con triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares.

Proclo en su Comentario al Libro1, indica que los Pitagóricos dieron el gran paso de sustentar su geometría sobre sus propios principios fundamentales y de liberarla de contenido concreto.

Sin embargo, tampoco existe registro alguno sobre la existencia de las demostraciones realizadas por los Pitagóricos. En el caso particular del teorema de Pitágoras, es relativamente fácil demostrar este teorema utilizando resultados sobre triángulos semejantes, pero los Pitagóricos no tenían una teoría completa de la semejanza. La demostración que Euclides aporta en la proposición 47 del libro I de los *Elementos* no utiliza la teoría de figuras semejantes, y se trata de una demostración que Proclo atribuye a Euclides mismo.



Elementos de Euclides. Proposición 47. Manuscrito griego del Siglo XII

Ilustración 1.7

http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/Elementos.html

La conclusión que se considera más aceptable acerca de la existencia de demostraciones en la geometría pitagórica es que en un inicio justificaban sus resultados sobre la base de casos especiales, análogamente a como lo hacían en aritmética. Sin embargo, se presume que en la época de los últimos pitagóricos, es decir, hacia el 400 a.C., pudieron haber dado ya demostraciones más rigurosas.

La contribución esencial de los griegos a la matemática fue el concepto de que los resultados matemáticos deberían ser establecidos deductivamente a partir de un sistema explícito de axiomas.

El texto más antiguo que nos ha llegado en el que se desarrolla el método axiomático deductivo es la obra de los *Elementos* de Euclides. No se tiene mucha información acerca de la vida de Euclides, aún cuando se supone que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a.C., de acuerdo con el citado Comentario de Proclo al Libro I de los Elementos.

Proclo señala que los *elementos* de cualquier estudio deductivo deben considerarse los teoremas fundamentales o clave, los que son de uso amplio y general sobre el objeto que se está estudiando, e iniciando con estos elementos, será posible adquirir conocimiento de las otras partes de esta ciencia, mientras que sin ellos será imposible comprender un objeto tan complejo. Asimismo, de acuerdo con el mismo Proclo, fue *Hipócrates de Chíos* quien realizó el primer esfuerzo en este sentido; afirma que Euclides introdujo en sus *Elementos* muchos de los teoremas de Eudoxio, perfeccionó teoremas de otros antecesores y proporcionó demostraciones irrefutables de muchos resultados insuficientemente demostrados por ellos.

A Euclides se debe la elección del sistema de axiomas y postulados, el orden de los teoremas y el rigor de las demostraciones, muchas de ellas suyas, sin duda.

Independientemente de cuánto haya de original en sus Elementos y cuánto pueda haber recogido de textos anteriores, el mérito de Euclides es indiscutible. Cabe mencionar que la obra de Euclides ha sido modelo del estudio de la geometría elemental durante más de veinte siglos[3].

Retomando la pregunta realizada a principio de esta sección, solamente nos resta mencionar que, como ya hemos visto, la transformación del carácter de la geometría fue un proceso paulatino. Diversos autores del tema consideran además que esta transformación estuvo indiscutiblemente entrelazada con la

[3] En el Apéndice 1, se encuentra una breve descripción del contenido de cada uno de los trece libros de los *Elementos*, así como las definiciones, las nociones comunes o axiomas, los postulados y las 48 proposiciones que conforman el Libro I.

transformación de la sociedad, de sus estructuras, de la cultura y sobre todo de la filosofía de esa época. Los Pitagóricos y Platón, ocupan un lugar especial en esta transformación.

Platón filósofo griego, alumno de Sócrates. Se estima nació entre los años 428 y 427 a. C. Fundador de la *Academia de Atenas*, donde fue maestro de Aristóteles. La contraposición entre la realidad y el conocimiento es descrita en su obra *La República*, que si bien plantea de manera general la filosofía de un estado ideal, incluye pasajes en los que establece que la matemática (y todo razonamiento lógico) necesita apoyarse en presupuestos previos y en lo que llama el conocimiento *discursivo descendente,* de lo que *se presupone a lo que se deduce*, en el que el pensamiento prescinde de cualquier apoyo sensible, de cualquier referencia a algo material. Se considera que las ideas filosóficas de Platón cimentaron el camino de Euclides para la realización de su obra los Elementos.

Ejercicios:

3) *Analiza las proposiciones 2 a la 10, 17, 22, 29 y 30 del libro I de Euclides. Puedes encontrar las proposiciones y demostraciones correspondientes en la liga http://newton.matem.unam.mx/geometria/.*

1.3. Las construcciones

Con la finalidad de hacer una revisión de algunas de las propiedades elementales del triángulo se realizarán algunas construcciones geométricas, que se considera favorecen la reflexión sobre las mismas.

El problema de construir figuras geométricas es uno de los más antiguos de la geometría y se convirtió en una rama importante de la geometría elemental; ya se mencionaron en la sección 1.1 los tres celebres problemas griegos de construcción.

¿Qué quiere decir realizar una construcción geométrica?

El problema de realizar una construcción geométrica no se refiere a encontrar una solución más o menos aproximada para fines prácticos o sobre algún caso particular, sino establecer un procedimiento general, del que podamos además comprobar su veracidad a partir de propiedades ya demostradas, a través del método deductivo.

Llevar a cabo o realizar una construcción geométrica significa entonces que, a partir de elementos dados o ya construidos (puntos, rectas, triángulos, segmentos, círculos, etc.) se derivan otros elementos, haciendo uso de herramientas predeterminadas (regla, compás, escuadras, transportador, etc.) un número finito de veces. Se tiene además que definir claramente cuál es el uso permitido de las herramientas que se utilizan, suponiendo que los instrumentos tienen precisión ideal.

Cuando mencionamos que se supone que los instrumentos tienen precisión ideal, lo que se quiere decir es que al realizar una construcción, independientemente de los errores que se puedan tener debidos al grosor de la punta del lápiz utilizado, a la exactitud con que se traza la recta por dos puntos, etc., lo que interesa no es la figura que se puede trazar en el papel, sino que se pueda demostrar que la secuencia de trazos propuestos es matemáticamente correcta; esto es, que efectivamente corresponde de manera abstracta al objeto buscado.

Pudiera sorprender que cuando se pide que se haga una construcción las herramientas permitidas se limiten en general al uso de la regla y el compás, e incluso en el caso de la regla no se permite su uso para medir, sino solamente para trazar rectas, lo que expresamos refiriéndonos a ella como regla no graduada. Esta restricción podríamos decir que es una "tradición" geométrica que se piensa fue establecida inicialmente por Platón y que se refleja de manera fundamental en la obra de Euclides.

¿Cómo podemos usar los instrumentos: regla y compás?

Las reglas para las construcciones están establecidas en los tres primeros postulados de Euclides[4]:

> *Postulado 1* (Es posible) trazar una recta de un punto a otro.
>
> *Postulado 2* (Es posible) prolongar continuamente una recta finita a una recta.
>
> *Postulado 3* (Es posible) trazar una circunferencia con un centro y una distancia.

Los dos primeros postulados indican que se puede utilizar la regla para trazar el segmento determinado por dos puntos y para prolongar cualquier segmento indefinidamente, de modo que solamente se permite hacer uso de una regla no graduada. Dados dos puntos, se puede hablar de la recta que pasa por esos dos puntos, o bien del segmento entre esos dos puntos.

En el caso del primer postulado, Euclides se refiere al segmento entre dos puntos. Aún cuando Euclides no lo menciona explícitamente en estos postulados subyace la propiedad de que la recta que pasa por dos puntos es única y de esta manera lo asumiremos en el curso. De hecho, algunos autores consideran el equivalente del primer postulado como: *Es posible trazar una única recta que pase por dos puntos dados*, o bien, *Si dos rectas tienen dos puntos en común coinciden en todos sus puntos.*

El tercer postulado indica que se puede trazar una circunferencia que tenga como centro cualquier punto y que pase por cualquier otro punto.

Este postulado restringe el uso del compás que conocemos actualmente, ya que no permite transportar distancias, esto es como si al levantar el compás del papel se cerrara automáticamente. Llamaremos a este compás que no permite transportar distancias "compás euclidiano", y al que conocemos que sí permite hacerlo "compás moderno". Aparentemente este hecho restringe las construcciones que se pueden hacer con el primero.

Sin embargo, la segunda proposición del libro I de Euclides demuestra que sí es posible transportar distancias: *(Es posible) colocar a partir de un punto dado (como extremo) una recta igual a otra dada.* Para demostrar esta proposición Euclides solamente hace uso de los postulados, nociones comunes y la primera proposición del libro I: (Es posible) dada una recta finita, construir un triángulo equilátero.

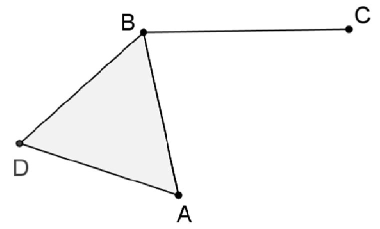
Expresando la segunda proposición en lenguaje actual:

---

[4] La redacción de los postulados está tomada de Heath, Sir Thomas L. The Thirteen Books of Euclid´s Elements. New York: Dover Publication Inc., 1956, se realizó la traducción e incluyó el texto entre paréntesis para que sea más fácil entender el sentido de los mismos.

Sean A un punto y BC un segmento. A partir del punto A, construir el segmento AP tal que AP = BC.

A continuación se presenta la construcción realizada por Euclides:



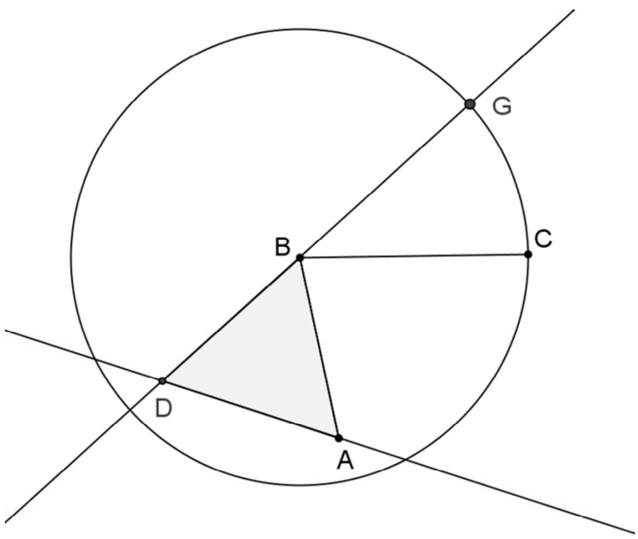
Proposición 2 (Libro I)

(Es posible) colocar a partir de un punto dado (como extremo) una recta igual a otra dada.

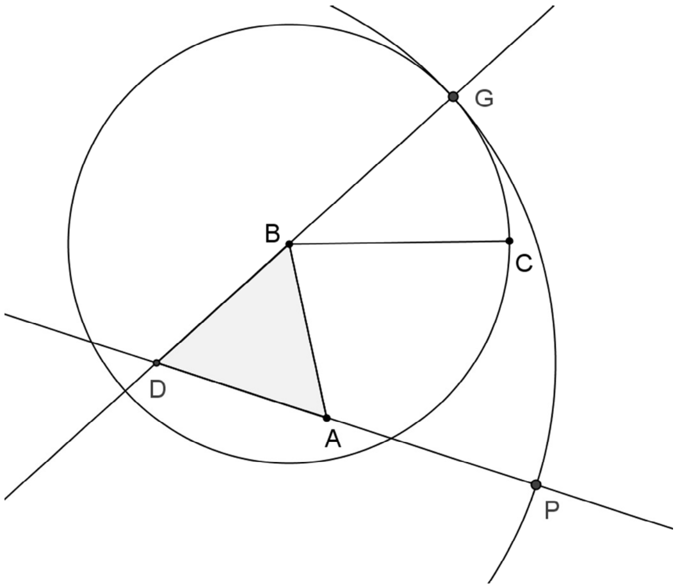
Expresando la proposición en lenguaje actual:

Sean A un punto y BC un segmento. A partir del punto A, construir el segmento AP tal que AP = BC.

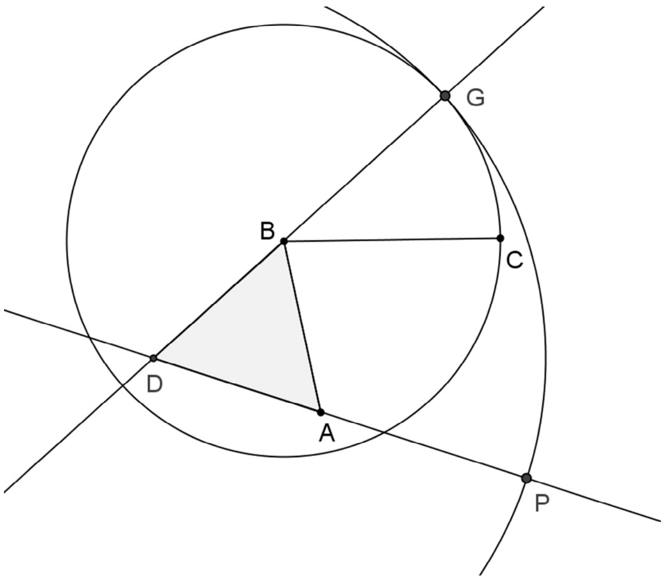
Se construye el segmento *AB* (postulado 1). Se construye el triángulo equilátero *ADB (proposición 1, libro I).*



Se trazan las rectas *BD* y *AD* (postulado 2). Se traza el círculo con centro en *B* y que pase por *C* (postulado 3). Sea *G* intersección del círculo y la recta *BD*.



Se trazan el círculo con centro en *D* y que pase por *G* (postulado 3). Sea *P* intersección de este último círculo y la recta *AD*.



***DG* = *DP* , por ser radios del mismo círculo (definición 15).**

***DA* = *DB*, por ser lados de un triángulo equilátero (proposición 1, libro I).**

Por tanto *AP* = *BG* = *BC*.

Construcción 1.3.1

Al realizar esta construcción, lo que se está demostrando es que cualquier construcción que se puede realizar con el compás moderno se puede también realizar con el compás euclidiano, aunque claro que por un procedimiento más largo, porque cada vez que se requiere trasladar segmentos hay que hacer una construcción adicional, la formulada en la proposición 2 del libro I.

Sin embargo, ya que los dos compases son equivalentes, usaremos el moderno por razones prácticas, sin pérdida de rigor.

¿Cuál es la característica de las construcciones que se pueden realizar con regla y compás?

Se ha visto cómo se pueden usar la regla y el compás y qué construcciones básicas se puede realizar con ellos: trazar rectas y círculos; pero, de acuerdo con lo que se mencionó al inicio de la sección, para llevar a cabo una construcción se puede realizar un número finito de estas construcciones básicas. Esto es, se puede:

- Trazar la recta que pasa por dos puntos.
- Determinar el punto de intersección de dos rectas.
- Trazar un círculo con centro en un punto dado y radio dado.
- Determinar los puntos de intersección de una recta y un círculo.
- Determinar los puntos de intersección de dos círculos.

Asimismo, cualquier construcción que se puede realizar con regla y compás, es una sucesión finita de estas construcciones.

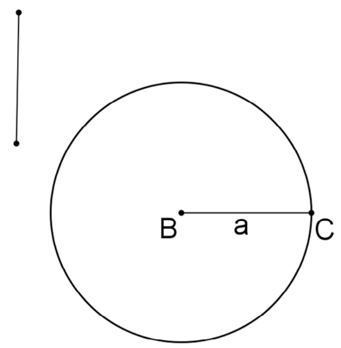
Existen instrumentos además de la regla y el compás con los cuales es posible realizar construcciones geométricas. De hecho, en los intentos por trisecar el ángulo, duplicar el cubo y cuadrar el círculo los griegos hicieron uso de curvas mecánicas como la cuadratriz.

Dados los objetivos de este curso nos ceñiremos a la regla y al compás moderno y no se abordarán estos tres problemas, pero se considera que dada la influencia que tuvo en la geometría griega el carácter de la investigación y los resultados obtenidos en los intentos por resolverlos, conocer este episodio de la geometría se vuelve obligado para momentos posteriores, en los que el estudiante haya desarrollado una mayor habilidad geométrica.

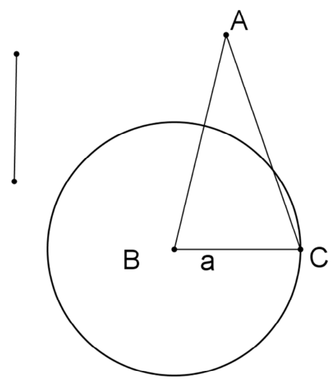
1.4. Construcciones de triángulos

Construcción 1.4.1

Construir un triángulo que tenga un segmento dado a como uno de sus lados.

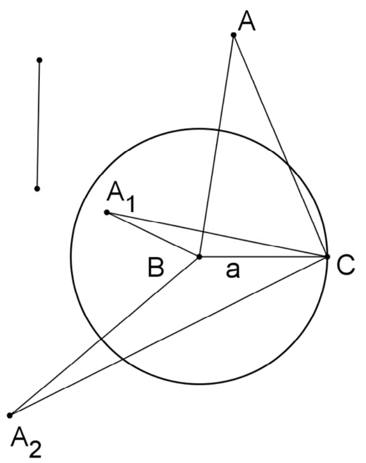


Sea *a,* el segmento dado. Se seleccionan dos puntos *B* y *C* en el plano tales que *BC* = *a*. Esto se puede hacer seleccionando cualquier punto *B* en el plano y trazando un círculo con radio *a*. Luego, se selecciona cualquier punto *C* en el círculo y se obtiene *BC* = *a.*



Si ahora se escoge cualquier punto *A* en el plano, el Δ *ABC* tiene como lado *BC* un segmento de longitud *a*.

Este triángulo no es el único que satisface la condición enunciada.



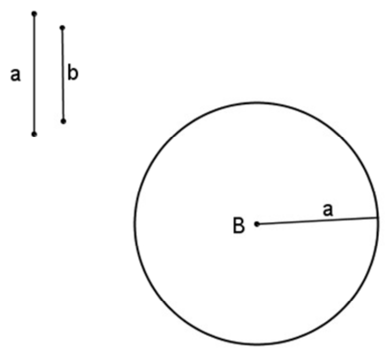
De hecho, cualquier otro punto en el plano que no esté en la recta determinada por *B* y *C* puede ser el tercer vértice del triángulo. Por ejemplo, A_1 y A_2 en la figura. Los triángulos $\Delta\, A_1BC$ y $\Delta\, A_2BC$ tienen también el lado *BC* de longitud *a*.

Construcción 1.4.1

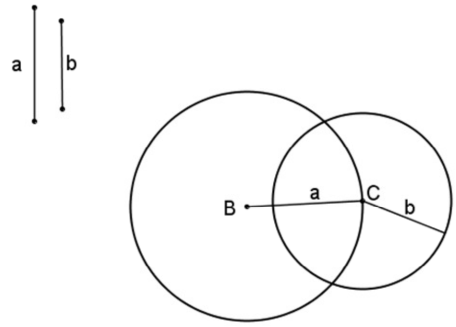
Existen una infinidad de triángulos que tiene como lado un segmento de longitud *a*, tantos como puntos en el plano. Es también claro que los otros dos lados de los triángulos, no tienen la misma longitud cuando variamos el punto *A*. Se observa además, que se podría haber escogido cualquier punto C_1, C_2, etc., en el círculo y la longitud de BC_1 y BC_2 también será igual al segmento dado *a.*

Construcción 1.4.2

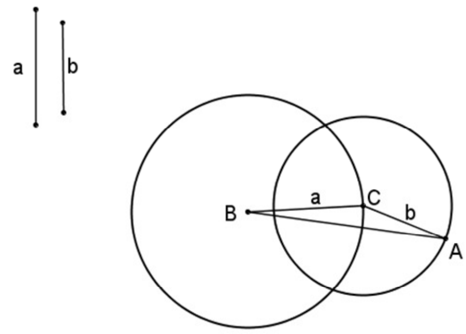
Construir un triángulo que tengan dos segmentos dados a y b como lados.



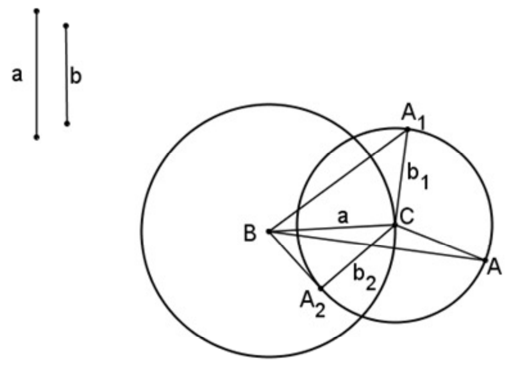
Sea *B* un punto cualquiera en el plano. Se traza un círculo con centro en *B* y radio *a*.



Se escoge un punto cualquiera C en el círculo y se obtiene $BC = a$.
Con centro en C se traza un círculo de radio b.



Cualquier punto A en este círculo está a distancia b de C.



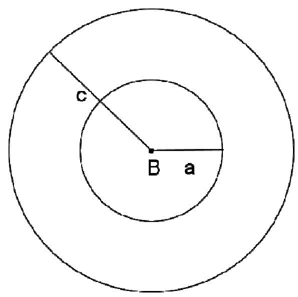
Sean A_1 y A_2 dos puntos cualesquiera en el círculo con centro en C. Los triángulos $\Delta\, ABC$, $\Delta\, A_1BC$, $\Delta\, A_2BC$ de la figura tienen sus lados $BC = a$ y $CA = CA_1 = CA_2 = b$. Cada punto A_i en el círculo con centro en C y radio b puede ser el tercer vértice de un triángulo $\Delta\, A_iBC$ que tenga sus lados $BC = a$ y $CA_i = b$.

Construcción 1.4.2

Existen una infinidad de triángulos que tienen dos de sus lados longitud *a* y *b* respectivamente, tantos como puntos en el círculo de radio *b*. Es claro que el otro lado de los triángulos construidos, no tiene necesariamente la misma longitud cuando variamos el punto *A* sobre el círculo.

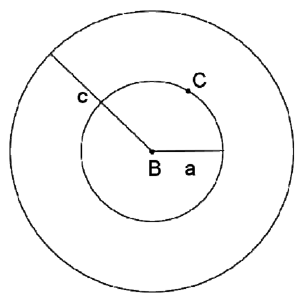
Construcción 1.4.3

Sean ahora, a, b y c tres segmentos dados, ¿cómo construir el triángulo que los tenga como lados?

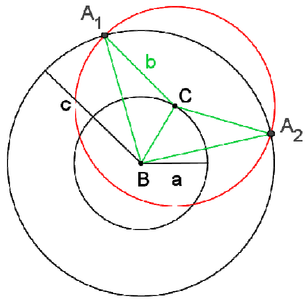


Sea *B* un punto cualquiera en el plano. Se traza un círculo con centro en *B* de radio *a*. Todos los puntos en el círculo están a distancia *a* del punto *B*. Con centro en *B* se traza otro círculo de radio *c*. Todos los puntos en este nuevo círculo están a una distancia *c* de *B*.

Así, que cualquier par de puntos, uno en cada círculo, satisfacen que tienen un par de lados iguales a los segmentos *a* y *c*, respectivamente, pero ¿cómo se garantiza que si se seleccionan dos puntos *P* y *Q*, uno en cada círculo, se tenga que el segmento *PQ* sea igual a *b*.



Sea *C* un punto cualquiera en el círculo con centro en *B* y radio *a*. Para encontrar el vértice *A* del triángulo buscado, se requiere encontrar un punto en el círculo con centro en *B* y radio *c* y que esté a una distancia *b* de *C*.



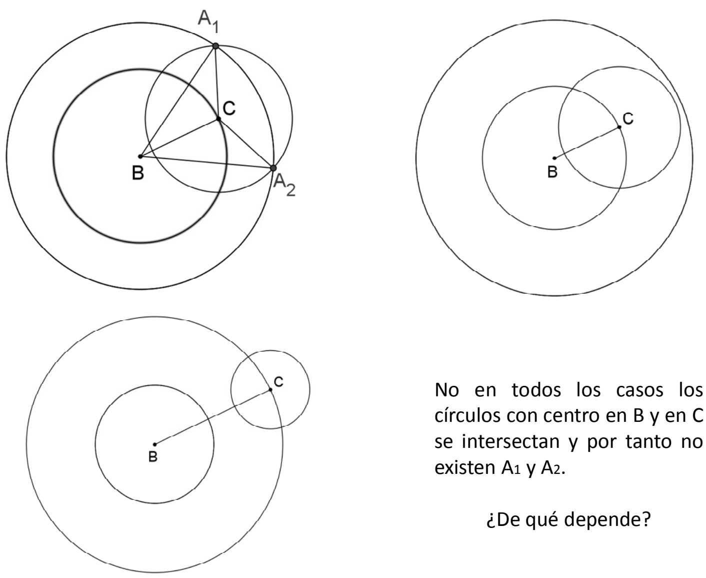
Se traza un círculo con centro en C y radio b. Sean A_1 y A_2 los puntos de intersección del círculo con centro en B y radio c con el círculo con centro en C y radio b. Los triángulos ΔA_1BC y ΔA_2BC son los buscados.

Construcción 1.4.3

Los triángulos tienen sus lados respectivamente iguales a los segmentos dados.

Sin embargo, se puede uno preguntar si los círculos, cuyas intersecciones son A_1 y A_2, siempre se intersecan o esto depende de la longitud de los segmentos dados.

En la figura 1.2 se presentan varios casos, variando las longitudes de a, b y c.



No en todos los casos los círculos con centro en B y en C se intersectan y por tanto no existen A_1 y A_2.

¿De qué depende?

Figura 1.2

Si se analizan las construcciones que se realizaron en esta sección, se observa que solamente se construyeron rectas, segmentos, círculos, puntos sobre los círculos e intersecciones de círculos en cada uno de los casos. Esto indica que las construcciones que se han realizado se pueden hacer con regla y compás. A partir de este momento, cada vez que se requiera hacer otra construcción que involucre en el proceso construir triángulos como los que hemos construido en los incisos a, b y c, ya no realizaremos la construcción, sino la daremos como ya realizada, con la finalidad de obtener figuras más claras.

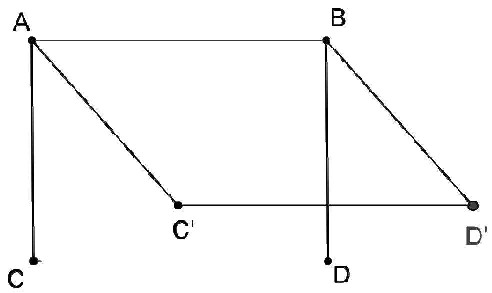
1.5. Congruencia de triángulos

Como se ha observado, algunas de las preguntas que se han hecho en la sección anterior con respecto a las construcciones realizadas son las relativas a bajo que condiciones se puede realizar esa construcción y a cuántos triángulos se pueden construir dadas esas condiciones.

Estas preguntas aparecen con frecuencia y son muy importantes en las matemáticas; se expresan usualmente como "existencia de la solución", esto es, si existe la solución a un problema dado y "unicidad de la solución", esto es si la solución que existe es única. En el caso de que haya más de una solución, es también de importancia conocer cuántas soluciones existen.

En el caso de las construcciones desarrolladas en la sección anterior, aún cuando dimos respuesta parcialmente a estas preguntas, no aclaramos en forma precisa que se quiere decir cuando hablamos de triángulos distintos.

En general se dice que dos figuras geométricas son *iguales* si tienen el mismo tamaño y la misma forma.



Los cuadriláteros ABCD y ABC'D' tienen sus lados respectivamente iguales y no tienen la misma forma.
¿Qué es lo que cambia?

Figura 1.3

Con la intención de que sea evidente cuando se habla de figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma y que el concepto quede descrito en forma precisa, se define la congruencia de figuras de la siguiente manera:

Dos figuras se dicen *congruentes*, si tienen respectivamente sus lados y ángulos de la misma magnitud. A los lados y ángulos correspondientes también se les llama homólogos.

Se utiliza el símbolo $\cong$ para denotar que dos figuras son congruentes.

En relación con los problemas de construcción que se presentaron en la sección 1.4 cuando se quiere saber el número de triángulos que se pueden construir, se está haciendo referencia a cuántos triángulos no congruentes se pueden construir. Esto es, se considera que todos los triángulos congruentes son la misma solución.

Dicho de otra forma, aún cuando la posición relativa de los triángulos en el plano sea diferente, se consideran como la misma solución si son congruentes.

En el caso del trabajo de Euclides, la noción de congruencia de triángulos surge por primera vez en la proposición 4 del libro I como igualdad de los triángulos. En esta misma proposición Euclides especifica lo que entiende por igualdad de triángulos, que corresponde con la definición de congruencia de figuras geométricas, aún cuando la igualdad de segmentos no está relacionada con la noción de longitud como un número real que actualmente usamos.

Proposición 4: Si dos triángulos tienen dos de sus lados respectivamente iguales y el ángulo entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. Euclides, demostró esta proposición superponiendo los triángulos[5]. Realmente, esta propiedad no es demostrable a partir de los postulados establecidos en los Elementos.

Hay otras dos propiedades que permiten establecer la congruencia de dos triángulos son:

Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales entonces son congruentes. (Proposición 8 del libro I).

Si dos triángulos tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales entonces son congruentes. (Proposición 26 del libro I).

A estas propiedades se les llama usualmente criterios de congruencia de triángulos y para fines prácticos se les denota usualmente como LAL (lado, ángulo, lado), la primera; LLL (lado, lado, lado) la segunda y ALA (ángulo, lado, ángulo).

Ejercicios:

4) *Realice las construcciones 1.41, 1.4.2 y 1.4.3 de esta sección con el programa Geogebra.*
5) *En relación con la construcción 1.4.2 de responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta, puede usar las construcciones que realizó con el programa Geogebra para inducir su respuesta:*
   a) *¿Es único el triángulo que se puede construir?*
   b) *¿Es el tercer lado igual en todos los triángulos?*

[5] En la actualidad, esta situación se ha precisado diciendo que dos figuras son congruentes si una puede hacerse coincidir con la otra a través de transformaciones rígidas del plano (las que conservan la métrica). Esta perspectiva nace a partir del Programa de Erlangen de Félix Klein a finales del siglo XIX. En su obra, Klein plantea el estudio de las geometrías a través de los invariantes bajo ciertos grupos de transformaciones.

c) *¿Qué se puede decir de sus ángulos?*

6) *En relación con la construcción 1.4.3 de esta sección responda las siguientes preguntas y justifique su respuesta, puede analizar la figura 1.2 para inducir su respuesta:*

   a) *Enuncie la condición para que dados tres segmentos se pueda construir un triángulo que los tenga como lados.*

   b) *¿En dado caso, cuántos triángulos se pueden construir que tengan como sus lados tres segmentos dados?*

   c) *¿Qué se puede decir de sus ángulos?*

1.6. Más sobre Euclides y los postulados

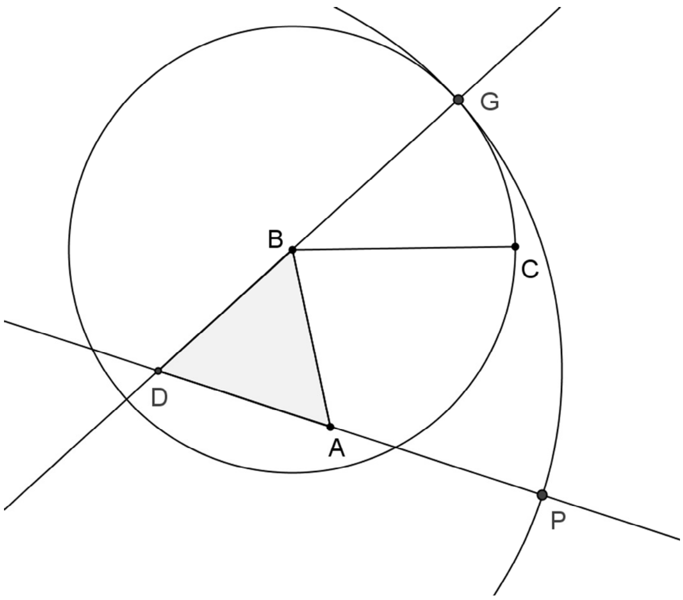
Al final de la sección 1.2 se habló de las ideas de Platón, al respecto de prescindir en la matemática de cualquier apoyo sensible, de cualquier referencia a lo material. Sin embargo, Euclides usa algunos argumentos aceptables desde la experiencia del mundo material, pero que no todos son consecuencia de sus suposiciones iniciales.

Si se revisan las construcciones formuladas en las proposiciones 1 y 22 del libro I, para construir un triángulo equilátero sobre un segmento, así como para construir un triángulo dados tres segmentos como lados, se requiere que cierto par de círculos se intersequen. Ni en las definiciones, ni en las nociones comunes o postulados Euclides formula alguna propiedad para garantizar que dos círculos se intersequen, si bien lo hace para que dos rectas lo hagan en el quinto postulado. Tampoco da una razón en sus demostraciones sobre por qué existe esta intersección. Esto mismo se hizo en la construcción 1.4.3. La razón para hacerlo es que al trazar los círculos en el papel o mediante el programa Geogebra se intersecan materialmente. Sin embargo, esto no está garantizado por los postulados propuestos por Euclides.

En el caso de la construcción 1.4.3 (proposición 22) son dos los asuntos en cuestión, uno es la posición relativa de los círculos que pueden estar muy alejados o uno contenido en el otro y evidentemente no hay intersección. Pero en el caso en que una parte del círculo está dentro del otro, pero otra parte está fuera de él, se aprecia que deberían intersecarse. Recuerde que en la figura 1.2 los círculos se intersecan o no, dependiendo de cómo varían las longitudes a, b y c.

El segundo asunto es este, ¿por qué existe el punto de intersección en el último caso? Para responder esta pregunta ahora se piensa inmediatamente en el concepto de continuidad, sin embargo no es hasta el siglo XIX que los conceptos de números reales y continuidad se formalizaron, por lo que no formaban parte del entorno matemático de Euclides, por lo que se puede inferir que para Euclides esto era parte de su experiencia material.

De la misma forma, en el construcción formulada en la proposición 2, se propone que la existencia del punto P, en la figura 1.4, como la intersección del círculo y la recta DA, sin que tampoco se fundamente su existencia, más allá de la experiencia material.



DG = *DP* , por ser radios del mismo círculo (definición 15).

DA = *DB*, por ser lados de un triángulo equilátero (proposición 1, libro I).

Por tanto *AP* = *BG* = *BC*.

Figura 1.4

En cuanto al área de figuras geométricas, Euclides a partir de la proposición 35, introduce otro concepto de igualdad, adicional al ya visto en el caso de la congruencia de triángulos, en esta ocasión referida al área de los polígonos. En este caso, la igualdad también es un término indefinido. Además, Euclides no hace uso de números para medir longitudes, ángulos o áreas, sino que establece relaciones entre ellos. Con la intención de tener mayor claridad veamos las ideas involucradas en la demostración de la proposición 35.

Proposición 35. Los paralelogramos que están sobre la misma base y están contenidos entre las mismas paralelas, son iguales.

Sean *ABCD* y *EBCF*, los paralelogramos que tienen la misma base *BC*. Sean BC y AF paralelas.

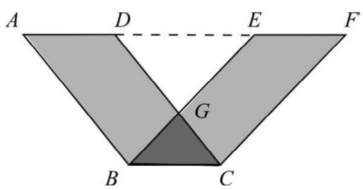


Figura 1.5

Euclides demuestra que los triángulos *ABE* y *DCF* son congruentes y en consecuencia sus áreas son iguales. Con esta igualdad y quitando de los dos triángulos el triángulo *GDE*, concluye que los trapecios *BGDA* y *CGEF* son iguales y finalmente aumentando a cada uno de estos dos trapecios el triángulo BCG llega a conclusión de que los paralelogramos *ABCD* y *EBCF* son iguales.

En esta demostración, así como en las demás demostraciones del libro I relacionadas con áreas, Euclides no hace uso de números sino de cierta comparación entre las figuras geométricas, utilizando de manera esencial las nociones comunes y el hecho de que figuras congruentes tienen áreas iguales.

En la actualidad el concepto de área puede introducirse formalmente en contextos muy diversos y con alcances diversos también. En este curso solamente se utilizarán resultados básicos sobre el área de polígonos y círculos.

En resumen, en los Elementos están inmersos algunos elementos que no forman parte de los axiomas ni de las nociones comunes, pero que formaban parte de la experiencia material de Euclides.

Los Elementos de Euclides fueron por mucho tiempo modelo de la teoría matemática deductiva y los postulados de los Elementos fueron considerados verdades universales del espacio físico durante muchos siglos, hasta el surgimiento de las geometrías no euclidianas.

En la matemática moderna, la verdad de los resultados en el mundo real no es relevante, lo importante es si son consistentes y si se pueden deducir a partir de las suposiciones de la teoría en cuestión.

En el caso de la fundamentación de la geometría, tuvieron que pasar más de 20 siglos y una gran transformación de las matemáticas para que se desarrollara una nueva axiomática para la geometría euclidiana, que retomó la axiomática de Euclides y utilizó los nuevos conceptos y áreas desarrolladas.

Entre los axiomas que se introducen en la Fundamentación de la Geometría de Hilbert están los de congruencia, en particular la proposición 4 de Euclides, y los de continuidad. Con la Fundamentación de la Geometría de Hilbert, las demostraciones se vuelven menos dependientes de las figuras y se puede asegurar las condiciones en las que se intersecan las rectas y las circunferencias (en otras palabras, las rectas y las circunferencias son continuas, no tienen agujeros).

Retomar el trabajo de Euclides o de Hilbert, en el sentido de ir demostrando cada una de las propiedades básicas y con base en estos resultados desarrollar otras propiedades de mayor interés requiere un tiempo mayor al programado para este curso. El interés que en todo caso tiene seguir por ese camino está relacionado con el estudio de la fundamentación de la geometría, que no es el objeto de nuestro estudio.

Por ello, se tomarán algunos resultados como elementos para el posterior desarrollo del curso y los llamaremos coloquialmente “nuestros postulados”. Los elementos adicionales a los postulados de Euclides que se tomarán para conformar “nuestros postulados”, son los que permitirán tener un tratamiento más ágil y que se consideran son naturales para el estudiante, ya sea por su carácter intuitivo o bien por la familiaridad que se supone que tiene con ellos. En este momento no preocupa que las propiedades propuestas sean independientes, sino que permitan un desarrollo consistente de las propiedades geométricas y que apoyen al mismo tiempo la construcción del sentido geométrico de los estudiantes.

“Nuestros Postulados”

1) Dados dos puntos distintos *P* y *Q* en el plano, existe una única recta que los contiene. (Postulado 1 de Euclides).
2) Cualquier segmento de recta se puede prolongar indefinidamente. (Postulado 2 de Euclides).
3) Dados un punto *A* y un radio *r*, existe un único círculo con centro en *A* y radio *r*. (Postulado 3 de Euclides).
4) Todos los ángulos rectos son iguales[6]. (Postulado 4 de Euclides).
5) Si una recta que corta a otras dos forma, del mismo lado, ángulos interiores que sumados sean menores que dos rectos, al prolongar indefinidamente las dos rectas, éstas se cortan del lado en que dicha suma de ángulos es menor que dos rectos. (Postulado 5 de Euclides).

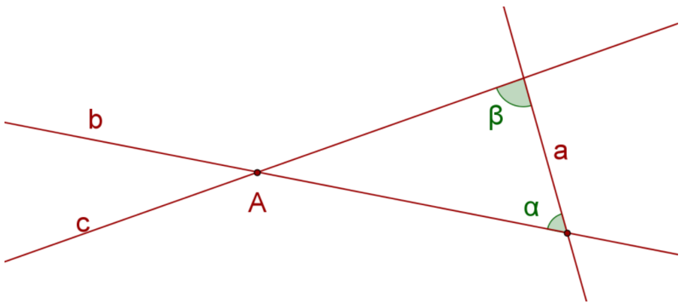


Figura 1.6

En la figura 1.6 se ilustra el significado del quinto postulado: Si la recta *a* corta a las rectas *b* y *c* de tal forma que $\alpha + \beta < 2$ rectos, entonces *b* y *c* se intersecan del mismo lado de *a* del que están α y β. En este caso llamamos *A* al punto de intersección.

[6] Euclides no define los ángulos rectos como aquellos cuya magnitud es de 90 grados, por lo que se vuelve necesario este postulado. Se puede ver la definición 10 del Apéndice 1.

6) Si dos rectas se cortan forman ángulos adyacentes rectos o que suman dos rectos. (Proposición 13 del libro I de Euclides).

7) Si dos ángulos adyacentes suman dos rectos, los lados no adyacentes de los ángulos son colineales. (Proposición 14 del libro I de Euclides).

8) Si dos triángulos tienen dos de sus lados respectivamente iguales y el ángulo entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes (LAL). (Proposición 4 del libro I de Euclides).

9) Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales entonces son congruentes (LLL). (Proposición 8 del libro I de Euclides).

10) Si dos triángulos tienen un lado y los ángulos adyacentes a ese lado respectivamente iguales entonces son congruentes (ALA). (Proposición 26 del libro I de Euclides).

11) Dado un triángulo, la suma de cualesquiera dos lados es mayor que el tercero. (Proposición 20 del libro I de Euclides). A esta propiedad se le llama la desigualdad del triángulo y se expresa:

    Sean a, b y c los lados de un triángulo, entonces se tiene que:

$$a < b + c;$$

$$b < a + c;$$

$$c < a + b$$

    Esta propiedad ya se había analizado en la construcción 1.4.3.

12) Cualquier punto P en una recta m divide la recta en dos semirrectas ajenas; si Q y R son dos puntos, uno en cada semirrecta, el punto P está en el interior del segmento QR.

13) Cualquier recta m divide al plano en dos semiplanos ajenos; si P y Q son dos puntos, uno en cada semiplano, el segmento PQ corta a la recta m.

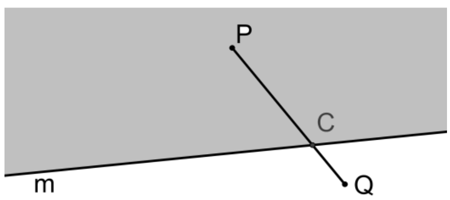


Figura 1.7

En la figura 1.7 se muestra la recta m. Para distinguir los dos semiplanos se ha sombreado uno de ellos. P y Q están en diferente semiplano y el segmento PQ corta a m en C.

14) Dos círculos de radio r y s respectivamente, se intersecan en uno o dos puntos si $a \leq r + s$; $r \leq a + s$; $s \leq a + r$.

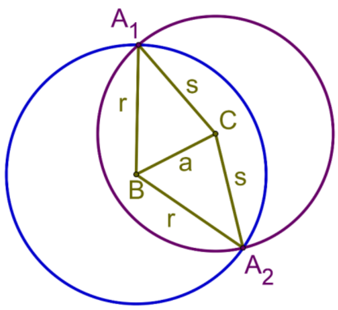


Figura 1.8

En la figura 1.7 se ilustra la propiedad anterior, si $a < r + s$, $r < a + s$ y $s < a + r$, entonces el círculo con centro en B y radio r y el círculo con centro en C y radio s se intersecan en dos puntos. En la figura les llamamos A_1 y A_2.

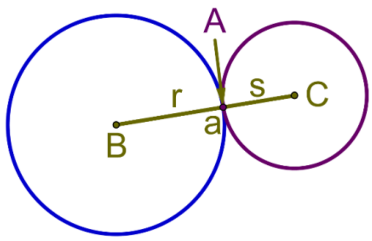


Figura 1.9

En la figura 1.9 se ilustra la propiedad anterior, si $a = r + s$, entonces el círculo con centro en B y radio r y el círculo con centro en C y radio s se intersecan en un solo punto. En la figura le llamamos A.

15) Cualquier círculo divide al plano en dos regiones ajenas, el interior y el exterior del círculo; si P y Q son dos puntos, uno en cada región, la recta PQ corta al círculo en un punto y la recta PQ corta al círculo en dos puntos, uno de ellos en el segmento PQ y el otro fuera de PQ.

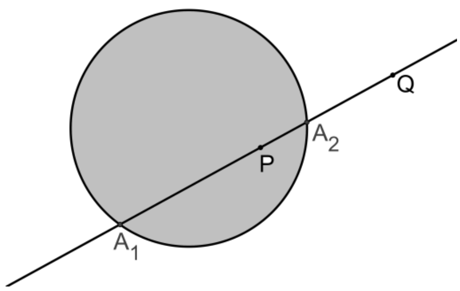


Figura 1.10

En la figura 1.10 se muestra un círculo. Para distinguir el interior del exterior, se ha sombreado el interior. P está en el interior y Q está en el exterior del círculo; el segmento PQ corta al círculo en A_2 y la recta PQ corta al círculo en A_1 y A_2. Se dice que la recta es una secante del círculo.

16) Sean A, B y C tres puntos no colineales y m una recta que no pasa por ninguno de estos tres puntos, si m corta el lado BC del triángulo entonces corta al lado AB o al lado AC (Axioma de Pasch).

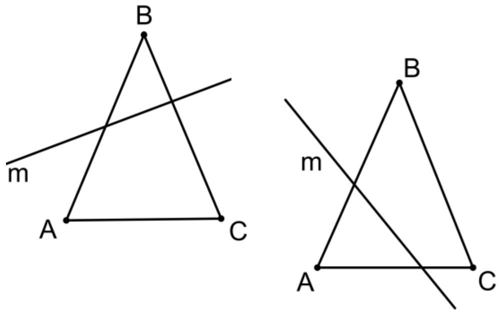


Figura 1.11

En la figura 1.11 se muestran las dos posibilidades, en el caso de que la recta m corte al lado AB, esto es, si corta a AB entonces corta a BC o a AC. Esta propiedad se puede ver intuitivamente como si la recta que entra al triángulo por un lado, tiene que salir por alguno de los otros dos.

17) En un mismo círculo o en círculos iguales, dos ángulos centrales son iguales si y sólo si subtienden arcos y cuerdas iguales.

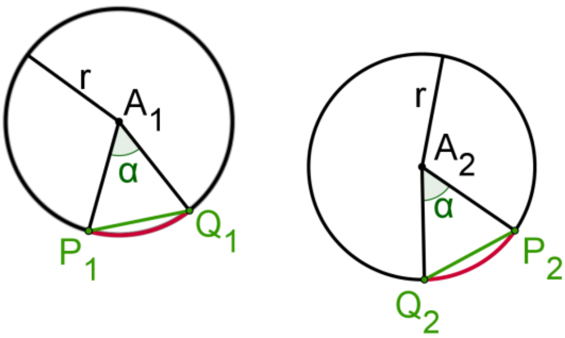


Figura 1.12

Se llama ángulo central de un círculo a un ángulo con vértice en el centro del círculo. Se llama arco subtendido al arco de círculo determinado por las intersecciones de los lados del ángulo con el círculo y cuerda al segmento determinado por estas intersecciones.

En la figura 1.12 se muestran dos círculos con radio igual a r, uno con centro en A_1 y otro con centro en A_2.

Se tiene en cada círculo un ángulo central igual a α. De acuerdo con la propiedad enunciada,

$$P_1Q_1 = P_2Q_2,$$

= .

Inversamente, si = o bien las cuerdas $P_1Q_1 = P_2Q_2$, entonces los ángulos centrales que los abarcan son iguales.

18) En un mismo círculo o en círculos iguales dos ángulos centrales están en la misma relación los arcos que abarcan.

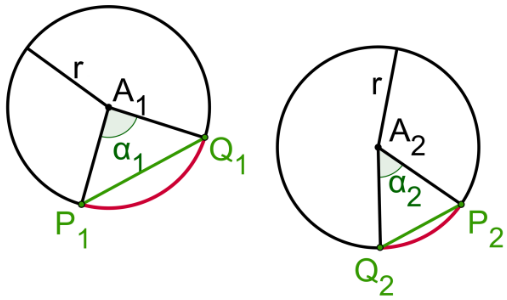


Figura 1.13

Esto es,

— —— .

19) Dos figuras congruentes tienen la misma área.

20) .Dos figuras equicompuestas tienen la misma área[7].

21) El área de un rectángulo se obtiene al multiplicar la magnitud de su base por la de su altura.

Para citar cualquiera de estas propiedades lo haremos con las letras Np y a continuación el número correspondiente a la propiedad a la que se hace referencia. Así, Np8 se refiere al criterio de congruencia LAL que aparece como número 8 en la lista anterior. También se puede uno referir a ellas por su nombre, como es el caso de Np11 o desigualdad del triángulo.

Ejercicios:

En ésta y las secciones siguientes de ejercicios se recuperan algunas de las construcciones y propiedades básicas que se utilizarán posteriormente en el

[7] Se dice que dos figuras son equicompuestas si se puede descomponer una de ellas en figuras ajenas con las cuales es posible componer el segundo polígono.

desarrollo del curso. Seguramente el lector ya las conoce, pero la intención de los mismos consiste en ejercitarse en la realización de construcciones y demostraciones, considerando el uso que se hace de los postulados y de las propiedades demostradas con anterioridad. Por ello, para la resolución de cada ejercicio pueden considerarse como ya demostradas las proposiciones enunciadas en los ejercicios anteriores.

7) *Realice las siguientes construcciones y demuestre que ha construido efectivamente el objeto solicitado. En cada demostración, haga explícito el uso de los postulados o propiedades que utiliza.*

    a) *Dado un ángulo α y un segmento de recta PQ, construir un ángulo igual a α que tenga como vértice a P y como uno de sus lados a PQ.*

    b) *Construir la bisectriz de un ángulo dado α. Recuerde que la bisectriz de un ángulo es la recta que pasa por su vértice y lo divide en dos partes iguales.*

    c) *Dada una recta m y un punto P cualquiera del plano construir una recta perpendicular a m que pase por P. Considera los diferentes casos.*

    d) *Dos triángulos que tengan dos lados iguales y un ángulo igual y que no sean congruentes.*

    e) *Dos triángulos que tengan dos ángulos iguales y un lado igual, respectivamente y que no sean congruente.*

8) *Demuestre que dados una recta m y un punto P cualquiera en el plano, la perpendicular a la recta m y que pasa por P es única.*

9) *Sean a y c dos rectas cualesquiera que se cortan, entonces los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

10) *Sean a y b dos rectas y c una transversal, entonces si a y b son paralelas, los ángulos correspondientes, los ángulos alternos internos y los ángulos alternos externos son respectivamente iguales.*

11) *Sean a y b dos rectas y c una transversal, si algún par de ángulos correspondientes o de ángulos alternos internos o de ángulos alternos externos son iguales, entonces a y b son paralelas.*

12) *Construya el punto medio de un segmento.*

13) *Demuestre que las bisectrices de ángulos suplementarios (colineales y adyacentes) son perpendiculares.*

14) *Demuestre que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si sus lados opuestos son iguales. Recuerde que un paralelogramo es un cuadrilátero con sus lados opuestos paralelos.*

15) *Demuestre que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si los ángulos opuestos son iguales.*

16) *Demuestre que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si las diagonales se bisecan.*

17) *Demuestre que un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si tiene un par de lados iguales y paralelos.*

18) *Demuestre que las diagonales de un rectángulo son iguales.*

19) *Demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares.*

20) *Demuestre que si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan y son iguales, el cuadrilátero es un rectángulo.*

21) *Demuestre que si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan y son perpendiculares, el cuadrilátero es un rombo.*

22) *Construya dos cuadriláteros, uno que tenga las diagonales iguales y otro que tenga las diagonales perpendiculares y que no sean paralelogramos.*

23) *Si en un cuadrilátero* $AB \parallel CD$ *y* AD *y* BC *no son paralelos. Demuestre que* $\angle D = \angle C$ *si y sólo si* $AD = BC$.

24) *Se llama trapecio isósceles al trapecio cuyos lados no paralelos son iguales. Demuestre que las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.*

25) *Demuestre que el área de un rombo es igual a un medio del producto de sus diagonales.*

26) *Dada una recta m y dos puntos P y Q cualesquiera en el mismo semiplano, construya dos segmentos, uno por P y otro por Q, que se corten sobre la recta m y que formen ángulos iguales con ella.*

27) *Demuestre que si un paralelogramo y un triángulo tienen la misma base y están contenidos en las mismas paralelas, entonces el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo (Proposición 41)*

28) *Calcular el área de un paralelogramo.*

29) *Calcular el área de un triángulo en función de alguno de sus lados y la altura correspondiente. Recuerde que la altura correspondiente a un lado de un triángulo es la perpendicular desde el vértice opuesto a ese lado.*

30) *Construya un triángulo isósceles en el que la suma de los lados iguales y el ángulo entre ellos están dados. ¿Se puede siempre construir el triángulo o en su caso cuáles son las condiciones para construirlo? ¿Es única la solución? Puede hacer la construcción con Geogebra.*

31) Construya un triángulo dados dos de sus lados y la altura del tercer lado. ¿Se puede siempre construir el triángulo o en su caso cuáles son las condiciones para construirlo? ¿Es única la solución? Puede hacer la construcción con Geogebra.

32) Construya un pentágono equilátero pero no regular, esto es que tenga sus lados iguales, pero no sus ángulos.

33) Demuestre que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.

34) Demuestre que si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados opuestos a esos ángulos son también iguales.

35) Demuestre que en un triángulo isósceles la mediana, la altura y la bisectriz correspondientes a la base del triángulo coinciden. Recuerde que la mediana de un triángulo es la recta que une el punto medio de un lado del triángulo con el vértice opuesto y una altura es la perpendicular a un lado desde el vértice opuesto.

36) Demuestre que si en un triángulo la altura, la mediana y la bisectriz de uno de sus lados coinciden, entonces el triángulo es isósceles.

37) Demuestre que si en un triángulo coinciden un par entre la mediana, la altura y la bisectriz de uno de sus lados, entonces la tercera de éstas coincide también y el triángulo es isósceles.

38) Demuestre que en un triángulo cada mediana es equidistante de los otros dos vértices.

39) Demuestre que el punto medio del lado BC de un triángulo ABC es punto medio de los pies de las perpendiculares trazadas desde estos vértices a la mediana por A.

40) Sea ΔABC un triángulo cualquiera, M el punto medio de BC. Demuestre que el área del ΔABC es el doble que la del ΔMBA y que la altura del ΔABC trazada por C es el doble de la altura del ΔMBA trazada por M.

41) Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Se trazan dos medianas. El triángulo ABC queda dividido por estas rectas en tres triángulos y un cuadrilátero. Demuestre que dos de los triángulos tienen la misma área y que el área del tercero es igual a la del cuadrilátero. Sugerencia: Utilice el primer resultado del ejercicio anterior.

42) Sea ΔABC un triángulo cualquiera, M el punto medio de AB y P un punto cualquiera en AM. La recta paralela a PC por M corta BC en D. Demuestre que el área del ΔABC es el doble del área del triángulo ΔBPD.

1.7. El Quinto postulado y teoremas relacionados

El Quinto postulado de Euclides fue motivo de discusión desde la época de Ptolomeo (siglo II) hasta el siglo XIX en que surgieron las geometrías no euclidianas.

Proclo escribió con referencia al Quinto Postulado: *"Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema que envuelve muchas dudas, el cual se propuso resolver Ptolomeo, pero su demostración requiere de muchas definiciones y teoremas".*

Como se puede observar, desde un inicio se consideró que este postulado no era tan evidente como los otros e incluso durante largo tiempo se consideró la posibilidad de que fuera consecuencia de ellos. Esta percepción fue reforzada por el hecho de que Euclides no hizo uso de este postulado en las primeras 28 proposiciones del libro I y de que la proposición 17 del mismo libro es su inverso y por tanto se demostró sin usar el Quinto Postulado.

Los esfuerzos que realizaron los matemáticos en torno al postulado se orientaron entonces en dos direcciones, por un lado trataron de obtener un postulado equivalente que fuera más evidente, o bien trataron de deducirlo de los otros postulados. Finalmente estos esfuerzos derivaron en el descubrimiento de las geometrías no euclidianas.

En estas notas se hace referencia a dos de las propuestas para sustituir al Quinto Postulado y que aparecen como proposiciones en el libro I de Euclides: el llamado Axioma de Playfair y un resultado de Legendre, muy conocido para todos.

El *Axioma de* Playfair debe su nombre a John Playfair que en 1795 propuso reemplazar el Quinto Postulado de Euclides por este axioma. En la proposición 31 del libro 1 de Euclides se plantea la construcción de una paralela a una recta por un punto dado, no así la unicidad, aunque ésta se puede demostrar a partir de los postulados, como se verá a continuación.

La equivalencia del Axioma de Playfair con el quinto postulado significa que de los postulados de Euclides se puede deducir el Axioma de Playfair y que si se sustituye el Quinto Postulado por el Axioma de Playfair se puede deducir el Quinto Postulado. Esto se puede representar de la siguiente manera:

V Postulado $\Rightarrow$Axioma de Playfair y Axioma de Playfair $\Rightarrow$ V Postulado.

O bien:

Quinto Postulado $\Leftrightarrow$ Axioma de Playfair.

En estas notas no se verá la equivalencia de los axiomas propuestos con el Quinto Postulado sino solamente que son consecuencia de éste.

Teorema 1.7.1 (Axioma de Playfair)

Dada una recta m y un punto P que no esté en m, existe una única recta paralela a m que pasa por P. (Proposición 31)

Demostración.

En primer lugar, se construirá una paralela a *m* que pase por *P*, con lo cual quedará demostrada la existencia y posteriormente se probará la unicidad.

Sea *m* la recta dada y *P* el punto dado. Se traza por *P* la perpendicular a *m* que pasa por *P* (ejercicio 7c). Sea esta perpendicular, la recta *n* y sea α el ángulo entre *m* y *n*, que por construcción es recto.

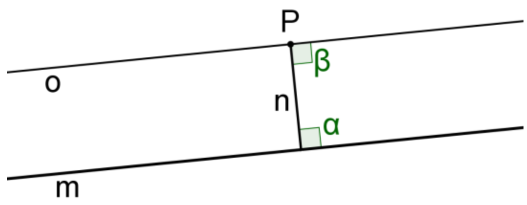


Figura 1.14

Se traza por *P* una perpendicular a la recta *n* (ejercicio 7c). Sea esta segunda perpendicular la recta *o* y sea β el ángulo entre *n* y *o* que también por construcción es recto.

La recta *o* es paralela a *m*, ya que $\alpha + \beta = 2$ rectos, lo cual implica que los ángulos correspondientes son iguales y *m* y *o* son paralelas (ejercicio 11).

Se demostrará ahora que la paralela es única. Supóngase que existen dos paralelas a la recta *m* por el punto *P*. Supóngase que o_1 y o_2 son las dos paralelas a *m* por el punto *P*. Se traza la perpendicular a *m* por *P*, que sabemos que es única, por el ejercicio 8. Sea *n* esta perpendicular.

Sean α el ángulo entre *n* y *m*, β_1 el ángulo entre o_1 y *n*, β_2 el ángulo entre o_2 y *n*.

$\alpha = \beta_1$ = un recto, por ser alternos internos y o_1 paralela a *m* (ejercicio 10).

$\alpha = \beta_2$ = un recto, por ser alternos internos y o_2 paralela a *m* (teorema 1.9.3).

Por tanto, $\beta_1 + \beta_2$ = 2 rectos y o_1 y o_2 son la misma recta por Np 7.

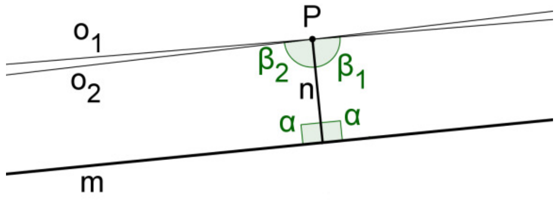


Figura 1.15

Por su parte Legendre (1752-1833) demostró que el Quinto Postulado de Euclides es equivalente al teorema siguiente, proposición 32 del multicitado libro I.

Teorema 1.7.2

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. (Proposición 32)

Demostración.

Sea ΔABC, un triángulo cualquiera, sean *a*, *b* y *c* sus lados y sean α, β y γ sus ángulos. Se traza *m* una recta paralela a cualquiera de sus lados, al lado *b* en el caso de la figura 1.15.

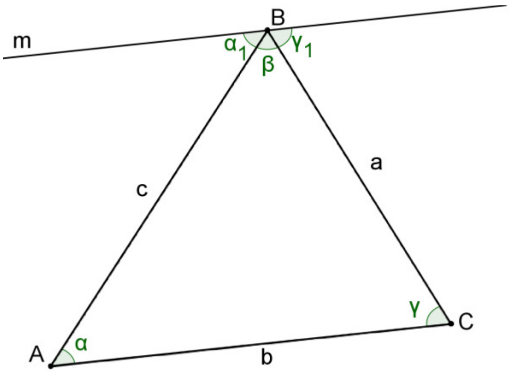


Figura 1.16

Sea γ_1 el ángulo formado por el lado *a* y la recta *m*. Los ángulos γ y γ_1 son alternos internos entre paralelas por tanto $\gamma = \gamma_1$, ejercicio 10.

Sea α_1 el ángulo formado por el lado *c* y la recta *m*. Los ángulos α y α_1 son alternos internos entre paralelas por tanto $\alpha = \alpha_1$, ejercicio 10.

Pero, además $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 2$ rectos, por Np6, por lo tanto $\alpha + \beta + \gamma = 2$ rectos, como queríamos demostrar.

Corolario: Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

Se le llama un ángulo exterior de un triángulo al ángulo formado por uno de los lados y la prolongación de uno de los lados adyacentes.

En la figura 1.17 se ha llamado α_1 al ángulo formado el lado *c* y la prolongación del lado *b,* α_2 al ángulo formado por el lado *b* y la prolongación del lado *c*. De manera análoga se han llamado β_1 y β_2 a los ángulos exteriores en el vértice *B* y γ_1 y γ_2 a los ángulos exteriores en el vértice *C*.

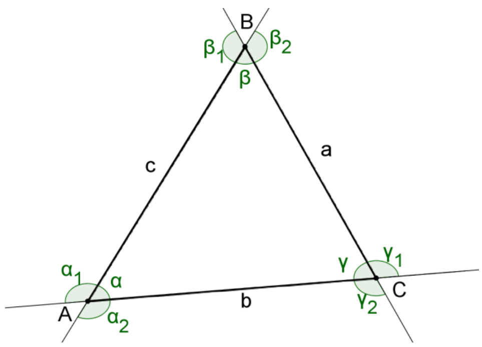


Figura 1.17

Del teorema 1.7.2 es inmediato que $\alpha_1 = \beta + \gamma$, ya $\alpha + \beta + \gamma = 2$ rectos, pero además $\alpha_1 + \alpha = 2$ rectos, por ser adyacentes colineales (Np6).

La demostración es análoga en el caso de los otros ángulos exteriores.

La infinidad de intentos que se dieron a través de los siglos para demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatros, aún cuando algunos de ellos inicialmente se consideraran válidos, resultaron a la postre inadecuados, tarde o temprano se descubría que alguna parte de la demostración se fundaba de manera implícita o explícita en alguna propiedad equivalente a lo que se quería demostrar. Entre estos está el de Proclo, que en su demostración incluyó implícitamente el hecho de que las paralelas son equidistantes.

Otra de las formas de tratar de demostrar que el quinto postulado no era independiente fue suponer los 4 primeros y la negación del quinto. De esta forma, si el quinto postulado es dependiente de los otros 4 y suponiendo su negación, se llegaría a alguna contradicción, ya que se tendría el quinto y su negación como verdaderas al mismo tiempo.

Esto plantea la siguiente pregunta, ¿cómo se puede negar el quinto postulado de Euclides?

Tomando como referencia como referencia el axioma de Playfair, que es equivalente al V, se puede negar de dos maneras:

- Por un punto exterior a una recta se pueden trazar más de una recta paralelas a la dada
- Por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna recta paralela a la dada

Estos dos enunciados pueden parecer falsos a primera vista si atendemos a la geometría que conocemos, la que hemos estudiado (geometría euclidiana). La primera opción dio lugar a la geometría hiperbólica y la segunda no es posible, ya que de los primeros cuatro postulados se desprende la existencia de al menos una paralela. Sin embargo posteriormente Riemann construyó una geometría en donde no existen paralelas, pero tampoco se cumple el segundo postulado, la geometría elíptica.

Ya que el axioma de Legendre también es equivalente al quinto postulado, en estas geometrías la suma de los ángulos interiores de un triángulo no es igual a dos rectos. Es menor a dos rectos en el caso de la hiperbólica y mayor en el caso de la elíptica.

Ejercicios:

43) *Demuestra que si una recta m es perpendicular a otra recta n, es también perpendicular a cualquier paralela a n.*

44) *Demuestra que dos rectas paralelas son equidistantes. Para hacer esta demostración, considérese la distancia sobre rectas perpendiculares a las paralelas.*

45) *Demuestre que la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 4 rectos.*

46) *Encuentre una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados (n-gono).*

47) *Sea ABC un triángulo isósceles con base BC, sean BM y CN las medianas del triángulo por B y C. Demuestra que BM = CN. Demuestre que si las rectas BM y CN son bisectrices o alturas, también son iguales. En el caso de las alturas analice por separado los casos en que el triángulo sea acutángulo y obtusángulo.*

48) *Sea ABC un triángulo y sean BQ y CR las alturas por B y C. Demuestre que si BQ = CR entonces el triángulo es isósceles.*

49) *Sea un triángulo ABC un triángulo equilátero y L, M y N puntos en BC, CA y AB respectivamente tales que MA = NB = LC. Demuestre que el triángulo LMN es también equilátero.*

50) *Si en un cuadrilátero AB ∥ CD y AD y BC no son paralelos. Demuestre que ∠D = ∠C si y sólo si AD = BC.*

51) *Se llama trapecio isósceles al trapecio cuyos lados no paralelos son iguales. Demuestre que las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.*

52) *Demuestre que el área de un rombo es igual a un medio del producto de sus diagonales.*

1.8. Lugares Geométricos

Se llama lugar geométrico al conjunto de puntos que satisface una propiedad tal que sólo estos puntos del plano la satisfacen. Esto es, un punto está en el lugar geométrico si y sólo si satisface la propiedad enunciada.

Muchas de las figuras que conocemos pueden describirse como lugares geométricos. Por ejemplo, el círculo es el lugar geométrico de los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado centro, la elipse es el lugar geométrico de los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es igual a un valor dado, etc.

Se define la *mediatriz* de un segmento como la perpendicular al segmento por su punto medio.

Teorema 1.8.1
La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

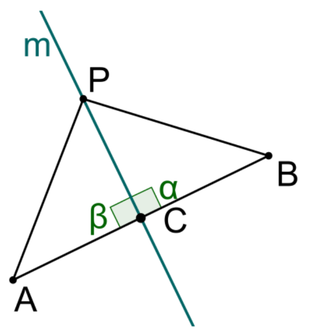


Figura 1.18

Sean A y B dos puntos en el plano. Sea C el punto medio del segmento AB y sea m la perpendicular al segmento AB por el punto C. La recta m es la mediatriz del segmento AB.

Sea P un punto cualquiera en m. Se demostrará que $PA = PB$

Los triángulos $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ ya que:

$AC = BC$, por ser C punto medio de AB,

$PC = PC$, lado común a los dos triángulos,

$\alpha = \beta$, por ser ángulos rectos.

Por el criterio LAL, los dos triángulos son congruentes y $PA = PB$, como se quería demostrar.

Se ha demostrado que todo punto en la mediatriz de un segmento es equidistante de los extremos del segmento, ahora se demostrará que todo punto que es equidistante de los extremos del segmento está en la mediatriz del mismo.

Sean A y B dos puntos en el plano y sea P un punto tal que $PA = PB$. Se traza el punto medio C del segmento AB y se traza el segmento PC.

Los triángulos $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ ya que:

$AC = BC$, por ser C punto medio de AB,

$PC = PC$, lado común a los dos triángulos,

$PA = PB$, por hipótesis.

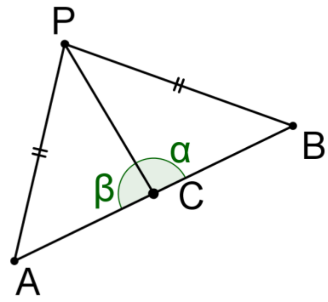


Figura 1.19

Por el criterio de congruencia LLL los dos triángulos son congruentes y $\alpha = \beta$, por lo tanto por Np 6, α y β son rectos y P está en la mediatriz.

En el teorema anterior se requiere demostrar que la mediatriz es un determinado lugar geométrico, sin embargo, en ocasiones solamente se enuncia la propiedad que cumple un conjunto de puntos y se requiere encontrar cuál es el lugar geométrico de esos puntos. El siguiente problema tiene esa característica.

Problema 1.8.2

¿Cuál es el lugar geométrico del vértice de un triángulo que tiene los otros dos vértices fijos y el área dada?

Sean B y C los vértices fijos del triángulo y sea K el área fija. Si A es el vértice variable, el área $K = \frac{1}{2}(BC \bullet h)$, ejercicio 17, donde h es la altura sobre BC y por el vértice A. Además, $h = \frac{2K}{BC}$ es constante ya que K es constante y BC también.

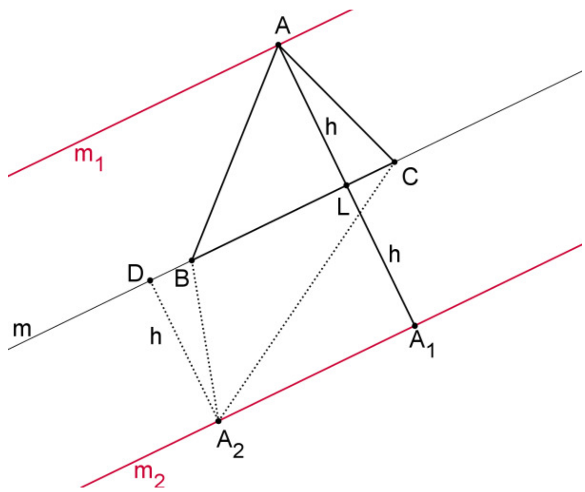


Figura 1.20

Entonces, al moverse el vértice A, la altura sobre BC es constante, igual a h, por lo que por el teorema 1.7.4, el vértice A debe estar sobre una recta paralela a la recta m que pasa por B y C a una distancia h. Hay dos rectas paralelas a m y a distancia h, una en cada semiplano determinado por m. Sean éstas m_1 y m_2. Para construirlas, se traza una perpendicular a m por cualquier punto L en ella y se trazan los puntos A y A_1 a distancia h de L. Entonces, cualquier punto que es tercer vértice de un triángulo de base BC y área K está en una de estas rectas.

Inversamente, si tomamos un punto A_2 en una de estas rectas, m_2 en la figura 1.19, el ΔA_2BC tiene área K, ya que la altura A_2D trazada desde A_2 es igual a h, por el teorema 1.7.4.

Entonces el lugar geométrico buscado, es un par de rectas paralelas a la recta m determinada por los dos puntos fijos y a distancia $h = \frac{2K}{BC}$ de la recta m.

Ejercicios:

53) *Demuestre que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Recuerda que la distancia de un punto a una recta se mide perpendicularmente.*

54) *Un segmento de recta de longitud dada p se mueve de tal forma que permanece paralela a una recta dada m y uno de sus extremos se mueve sobre una circunferencia dada. Encuentre el lugar geométrico del otro extremo del segmento.*

55) *Demuestre que la suma de las perpendiculares trazadas desde cualquier punto en el interior de un triángulo equilátero a los lados del triángulo es constante.*

56) *Sea m una recta dada y sean P y Q dos puntos dados. Encuentre el punto X en m tal que PX + XQ sea mínima. Considere tanto el caso en que P y Q están del mismo lado de m como el caso en que están de lados diferentes de m.*

57) *Dados el área K y uno de los lados de un triángulo, determine el triángulo de tal forma que la suma de los otros dos lados sea mínima.*

1.9. Semejanza de triángulos

En matemáticas el concepto de semejanza está muy ligado al concepto de proporcionalidad y ha tenido históricamente un gran número de aplicaciones. Los mapas, por ejemplo, son representaciones a escala de una porción de la Tierra, esto es, imágenes proporcionales; se construyen modelos a escala (proporcionales) de edificios, circuitos electrónicos, etc., con la finalidad de hacer algunas evaluaciones antes de iniciar sus procesos constructivos.

Al igual que el concepto de congruencia, este concepto fue trabajado ya por los griegos, e igualmente, sus propiedades tienen gran utilidad para un sinnúmero de demostraciones geométricas. Como ya se ha dicho, entre el conocimiento geométrico que se atribuye a los Pitagóricos está el desarrollo de una teoría de las proporciones, aunque limitada a segmentos conmensurables. Entre sus temas de estudio estuvo la construcción de las llamadas ternas pitagóricas o sea las ternas de números enteros que podían ser lados de un triángulo rectángulo. Por otra parte, tenían la teoría de que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números enteros y sus razones. Es en este contexto en el que se supone que encontraron que la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables. La existencia de inconmensurables complicó la identificación entre número y geometría.

Euclides, en el libro X de los Elementos, que trata fundamentalmente sobre magnitudes conmensurables e inconmensurables, retomó la teoría de proporciones de Eudoxio para todo tipo de magnitudes, y formula la siguiente definición:

"Se llama magnitudes conmensurables a aquéllas que se miden con la misma medida, e inconmensurables a aquéllas de las que no es posible hallar una medida común".

Si todos los segmentos fueran conmensurables, entonces dado un segmento AB y con $A'B'$ cualquier otro segmento se tendría un segmento $\bar{u}$ tal que:

$AB = p\bar{u}$ y $A'B' = q\bar{u}$, luego $\frac{A'B'}{AB} = \frac{q}{p}$, $\forall$ segmento $A'B'$ y p, q enteros, p≠0.

Si se escoge AB como unidad, se tendría que $A'B' = \frac{q}{p}$, $\forall$ segmento $A'B'$, por lo que cualquier segmento tendría longitud racional. En vista de la correspondencia entre los puntos de la recta numérica y los números reales, esto implicaría que todo número real sería racional. Entonces, del hecho de que todos los segmentos fueran conmensurables se tendría que todos los números reales serían racionales, pero sabemos que existen números reales no racionales (como $\sqrt{2}$), por lo que los segmentos inconmensurables efectivamente existen.

En cuanto al concepto de semejanza Euclides establece en el libro VI la teoría de la semejanza la cual define como: *dos figuras que tienen el mismo número de lados son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos correspondientes también iguales. Si dos triángulos ABC y* $A_1B_1C_1$ *son semejantes, lo denotaremos como* $\Delta ABC \approx \Delta A_1B_1C_1$.

Es conveniente reflexionar sobre el significado de la proporcionalidad de los lados de dos figuras.

Supóngase que se tienen dos triángulos semejantes, ΔABC y $\Delta A_1B_1C_1$, entonces sus lados correspondientes son proporcionales; esto es,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k \quad .$$

La constante *k* recibe el nombre de constante de proporcionalidad. Estas igualdades son equivalentes a las siguientes ecuaciones:

$$AB = k\, A_1B_1,\ BC = k\, B_1C_1,\ CA = k\, C_1A_1.$$

Es decir, la constante *k* es el número por el que hay que multiplicar la longitud de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$ para obtener la longitud de los lados del triángulo *ABC*. Pero, estas ecuaciones son equivalentes a las siguientes:

$$A_1B_1 = \frac{1}{k}\, AB,\ B_1C_1 = \frac{1}{k}\, BC,\ C_1A_1 = \frac{1}{k}\, CA.$$

Es decir, la constante $\frac{1}{k}$, el inverso de *k*, es el número por el que hay que multiplicar la longitud de los lados del triángulo *ABC* para obtener la longitud de los lados del triángulo $A_1B_1C_1$. Esto es, las constantes *k* o $\frac{1}{k}$, indican la escala a que está una figura con respecto a la otra.

En el caso de la semejanza de triángulos, la definición implica que para que dos triángulos sean semejantes se requiere la igualdad de sus tres ángulos y la proporcionalidad de sus tres lados. Sin embargo, al igual que en el caso de congruencia de triángulos, para determinar la semejanza de dos triángulos se requiere solamente de tres elementos, por supuesto no cualesquiera tres.

Antes de enunciar los tres teoremas de semejanza, se revisarán dos resultados que nos serán de utilidad para la demostración de los mismos.

Teorema 1.9.1

Si una recta paralela a uno de los lados de un triángulo corta a los otros dos, entonces los divide proporcionalmente.

Este teorema es la proposición 2 del libro VI de Euclides y la demostración a continuación está basada en la de ese texto.

Demostración:

Sea ABC un triángulo y m una recta paralela a BC que corta a los lados AB y AC en los puntos B_1 y C_1 respectivamente.

Se demostrará primero que:

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} .$$

Para ello se va a comparar el área de algunos triángulos, por lo que se trazan los segmentos BC_1 y CB_1 (Np1), la perpendicular a la recta AB desde C_1 (ejercicio 7c), donde H_1 es el pie de esta perpendicular y la perpendicular a la recta AC desde B_1 donde H_2 es el pie de esta perpendicular.

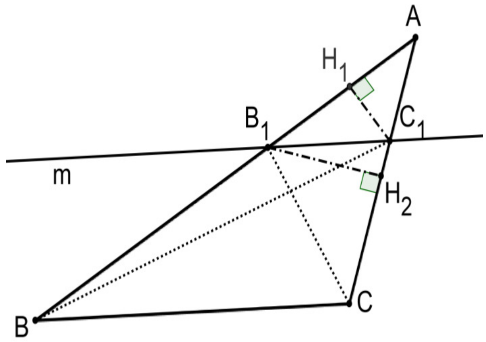


Figura 1.21

Se consideran los triángulos AB_1C_1 y BB_1C_1; si se llama K_1 al área del ΔAB_1C_1 y K_2 al área del ΔBB_1C_1 se tiene que:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}(AB_1)(C_1H_1)}{\frac{1}{2}(B_1B)(C_1H_1)} = \frac{AB_1}{B_1B} ,$$

ya que por construcción C_1H_1 es altura tanto de ΔAB_1C_1 como del ΔBB_1C_1 y sus bases son AB_1 y B_1B, respectivamente.

Se consideran ahora los triángulos AB_1C_1 y CB_1C_1, si se llama K_3 al área del ΔCB_1C_1 se tiene que:

$$\frac{K_1}{K_3} = \frac{\frac{1}{2}(AC_1)(B_1H_2)}{\frac{1}{2}(C_1C)(B_1H_2)} = \frac{AC_1}{C_1C} ,$$

ya que, por construcción B_1H_2 es altura tanto de ΔAB_1C_1 como del ΔCB_1C_1 y sus bases son AC_1 y C_1C, respectivamente.

Pero, $K_2 = K_3$, ya que los triángulos BB_1C_1 y CB_1C_1 tienen la misma base, B_1C_1, y sus alturas son iguales (¿por qué?). Luego,

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{K_1}{K_3},$$

de donde,

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C},$$

como se quería demostrar.

Se verá ahora que las igualdades $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ y $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$ son equivalentes.

Supongamos que $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$, se tiene entonces,

$$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} \Rightarrow \frac{B_1B}{AB_1} = \frac{C_1C}{AC_1},$$

$$\frac{B_1B}{AB_1} = \frac{C_1C}{AC_1} \Rightarrow \frac{B_1B}{AB_1} + 1 = \frac{C_1C}{AC_1} + 1,$$

$$\frac{B_1B + AB_1}{AB_1} = \frac{C_1C + AC_1}{AC_1},$$

pero, $B_1B + AB_1 = AB_1 + B_1B = AB$ y $C_1C + AC_1 = AC_1 + C_1C = AC$, de donde,

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1} \Rightarrow \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}.$$

Se puede observar que todas implicaciones involucradas en esta demostración son reversibles, por lo que efectivamente las dos igualdades son equivalentes.

Ahora se demostrará el recíproco del Teorema 1.9.1:

Teorema 1.9.2

Si una recta corta a dos de los lados de un triángulo proporcionalmente, entonces es paralela al tercer lado.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo y *m* una recta tal que corta a los lados *AB* y *AC* en los puntos B_1 y C_1 respectivamente en la misma proporción, esto es:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}\,.$$

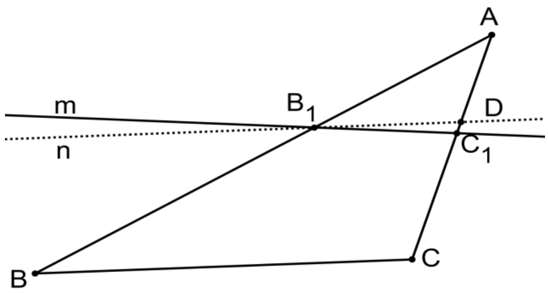


Figura 1.22

Si se supone que la recta *m* no es paralela al lado *BC*, entonces se puede trazar la recta *n* paralela a *BC* que pasa por B_1. Ya que *n* corta a *AB*, se tiene por el axioma de Pasch que corta a *BC* o a *AC*, pero como es paralela a *BC*, corta necesariamente a *AC*. Sea *D* el punto de intersección de *n* con *AC*.

Por el Teorema 1.9.1, se tiene que:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AD}{AC}\,,$$

por lo tanto, $\frac{AC_1}{AC} = \frac{AD}{AC}$, de donde $AC_1 = AD$ y se tiene que el punto *D* coincide con el punto C_1. Esto es, si *m* no es paralela a *BC*, las rectas *m* y *n,* que son distintas, tendrían dos puntos en común, lo que contradice el primer postulado. Por tanto, *m* es paralela a *BC*.

De los teoremas *1.9.1* y *1.9.2* se obtiene entonces el siguiente resultado:

Una recta que corta a dos de los lados de un triángulo es paralela al tercer lado si y sólo si divide a esos dos lados proporcionalmente.

Este resultado se atribuye a Tales de Mileto, a quien ya se ha mencionado, y como ya se ha dicho, se le atribuye el cálculo de la altura de las pirámides de Egipto, comparando la sombra de un objeto de longitud conocida con la de la pirámide y utilizando la semejanza de triángulos.

Teorema 1.9.3

Si dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales, entonces son semejantes; esto es, tienen sus lados proporcionales.

Demostración:

Sean ΔABC con ángulos interiores α, β y γ y $\Delta A_1B_1C_1$ con ángulos interiores α_1, β_1 y γ_1 tales que:

$$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1.$$

Para demostrar que los dos triángulos son semejantes, se demostrará que sus lados son proporcionales; esto es, se demostrará:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}\ .$$

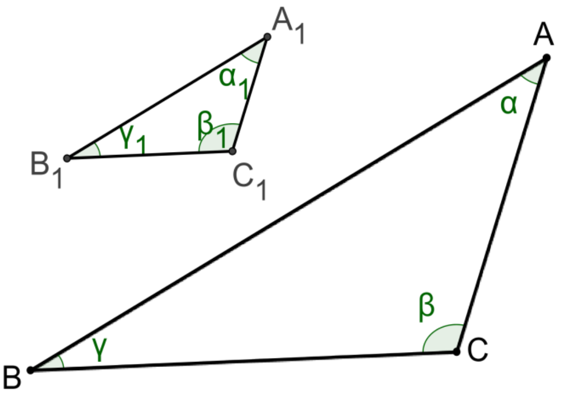


Figura 1.23

Para ello se construyen B_2 y C_2 sobre los lados AB y AC respectivamente, tales que $AB_2 = A_1B_1$ y $AC_2 = A_1C_1$.

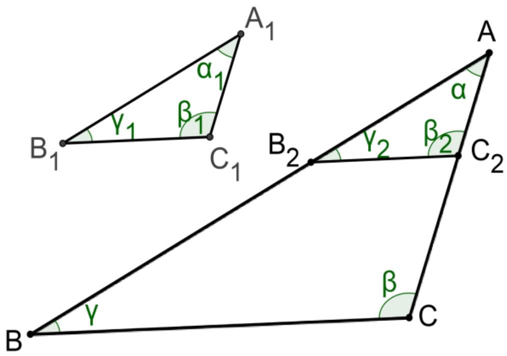


Figura 1.24

Como además $\alpha = \alpha_1$, se tiene que $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta AB_2C_2$ (LAL), de donde:

$$\beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2 \ \text{ y } \ B_1C_1 = B_2C_2.$$

Entonces, de la hipótesis y estas igualdades se obtiene que:

$$\beta = \beta_2,\ \gamma = \gamma_2,$$

y por tanto la recta B_2C_2 es paralela a BC (ejercicio 11), y por el teorema 1.8.1:

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}\ ,$$

y ya que $AB_2 = A_1B_1$ y $AC_2 = A_1C_1$, se tiene que:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}\ .$$

Para demostrar la proporcionalidad del tercer lado se construye, de manera análoga, otro triángulo congruente al $\Delta A_1B_1C_1$, pero ahora con vértice en B o en C.

Supóngase que se han seleccionado los puntos A_3 y C_3 sobre los lados BA y BC respectivamente, tales que $BA_3 = B_1A_1$ y $BC_3 = B_1C_1$.

Procediendo de manera análoga al caso anterior, se demuestra que:

$$\Delta B_1C_1A_1 \cong \Delta BC_3A_3,$$

de donde:

$$\beta_1 = \beta_3,\ \alpha_1 = \alpha_3 \text{ y } A_1C_1 = A_3C_3.$$

Entonces, la recta A_3C_3 es paralela a AC (ejercicio 11), y por el teorema 1.9.1:

$$\frac{BA}{BA_3} = \frac{BC}{BC_3},$$

y ya que $BA_3 = B_1A_1$ y $BC_3 = B_1C_1$, se tiene que

$$\frac{BA}{B_1A_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

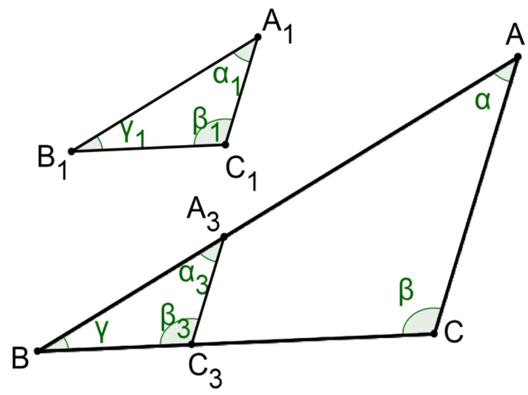


Figura 1.25

Observe que dado que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos (teorema 1.7.2), basta con que dos de sus ángulos sean respectivamente iguales para que los triángulos sean semejantes.

Los otros dos teoremas de semejanza se enuncian a continuación y su demostración se deja como ejercicio al lector.

Teorema 1.9.4

Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los dos lados adyacentes a éste proporcionales, entonces son semejantes; esto es, tienen sus otros dos ángulos respectivamente iguales respectivamente y el tercer lado está en la misma proporción.

Teorema 1.9.5

Si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales, entonces son semejantes; esto es, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

A continuación se presentan un resultado interesante en cuya demostración se utilizan las propiedades de los triángulos semejantes:

Teorema 1.9.6

Sea ΔABC, para cualesquiera puntos P y Q en los lados AB y CA del triángulo respectivamente, tales que la recta PQ es paralela a BC, se tiene que las rectas BQ y CP se cortan sobre la mediana desde el punto A.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo, *P* un punto en *AB* y *Q* un punto en *AC*, tales que la recta *PQ* es paralela a la recta *BC*. Sea *R* el punto de intersección de *BQ* y *CP* y *S* el de *AR* y *PQ*. Se traza la recta AR y se denota como *M* al punto de intersección de *AR* con *BC*. ¿Cómo se sabe que estas dos rectas no son paralelas? Para demostrar que *AR* es la mediana por *A*, basta demostrar que *M* es el punto medio de *BC*, esto es que *BM* = *MC*.

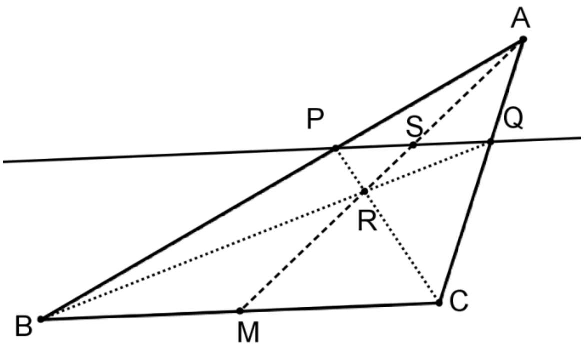


Figura 1.26

Como *PQ* es paralela a *BC*, los triángulos *APS* y *ABM* son semejantes (ejercicio 10 y teorema 1.9.3), por tanto:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PS}{BM} = \frac{SA}{MA} \quad (1).$$

Análogamente triángulos *ASQ* y *AMC* son semejantes, por tanto:

$$\frac{AS}{AM} = \frac{SQ}{MC} = \frac{QA}{CA} \quad (2).$$

De (1) y (2) se tiene que:

$$\frac{PS}{BM} = \frac{SQ}{MC},$$

de donde:

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{BM}{MC} \quad (3).$$

Ahora, en los triángulos *PSR* y *CMR* se tiene que:

$\angle PRS = \angle CRM$, por ser opuestos por el vértice,

$\angle RPS = \angle RCM$, por ser alternos internos entre paralelas,

por tanto, los triángulos son semejantes (teoremas 1.7.2 y 1.9.3); de donde se tiene que:

$$\frac{PR}{CR} = \frac{RS}{RM} = \frac{SP}{MC} \quad (4).$$

Análogamente, $\Delta QSR \cong \Delta BRM$ y por tanto:

$$\frac{RS}{RM} = \frac{SQ}{MB} = \frac{QR}{BR} \quad (5).$$

De (4) y (5) se tiene que:

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{MC}{BM} \quad (6).$$

De (3) y (6) se tiene que $\frac{BM}{MC} = \frac{MC}{BM}$ y por tanto $BM = MC$, de donde M es el punto medio de BC y R el punto de intersección de PC y BQ está sobre la mediana por el punto A, como se quería demostrar.

En la figura 1.27 se ilustra el resultado anterior. En el triángulo ABC, las rectas P_1Q_1, P_2Q_2, y P_3Q_3 son paralelas al lado BC del triángulo. El punto M es el punto medio del lado BC y AM es la mediana por el punto A. Los puntos O_1, O_2 y O_3, son los puntos de intersección de las rectas CP_1 y BQ_1, CP_2 y BQ_2 y CP_3 y BQ_3, respectivamente. Los puntos O_1, O_2 y O_3 están sobre la mediana AM, de acuerdo con el teorema anterior.

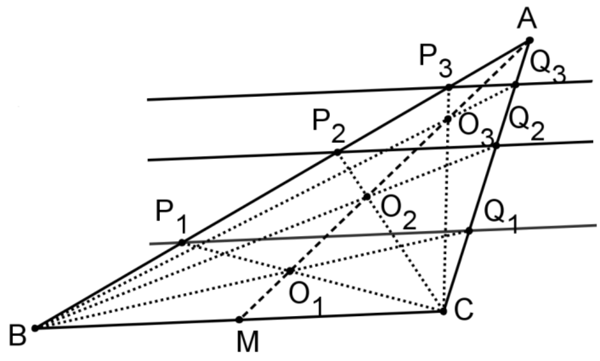


Figura 1.27

Ejercicios

58) *Demuestre los teoremas 1.9.4 y 1.9.5.*

59) *Dado un triángulo ABC y L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente, demuestra que los triángulos ABC y LMN son semejantes y que LM es paralela a AB, MN a BC y NL a CA. Encuentre la razón de proporcionalidad entre $\triangle ABC$ y $\triangle LMN$.*

60) *Demuestre que si $\triangle ABC$ es rectángulo con hipotenusa AC y BH la altura sobre la hipotenusa, entonces los triángulos BHC y BHA son semejantes y los dos son semejantes al $\triangle ABC$.*

61) *Dado un segmento de recta AB, divídalo en n partes iguales.*

62) *Encuentre la distancia entre un punto inaccesible pero visible y un punto accesible.*

63) *Demuestre que las alturas de dos triángulos semejantes están en la misma proporción que sus lados.*

64) *Construya un triángulo semejante a un triángulo dado y que tenga un perímetro dado.*

65) *Demuestre que si tres triángulos semejantes son tales que coincide uno de sus vértices correspondientes y un segundo conjunto de vértices correspondientes es colineal, entonces el tercer conjunto de vértices correspondientes, también es colineal.*

66) *Demuestre que las medianas de un triángulo son concurrentes. Al punto de intersección de las medianas se le llama centroide o punto mediano.*

67) *Demuestre que el punto mediano de un triángulo es un punto de trisección de cada una de las medianas.*

68) *Construya un triángulo que tenga tres segmentos dados como medianas.*

69) *Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera. Demuestre que los puntos medios de sus lados son vértices de un paralelogramo.*

70) *Sea ABC un triángulo y P un punto exterior al triángulo. Sea* B_1 *un punto sobre PB. Se trazan por* B_1 *dos rectas m y n paralelas a AB y BC respectivamente. Si* A_1 *es el punto de intersección de m con PA y* C_1 *el de n con PC, demuestre que* A_1C_1 *es paralela a AC.*

1.10. El Teorema de Pitágoras

El *Teorema de Pitágoras* es de las relaciones matemáticas más conocidas, que más demostraciones han recibido. Este teorema aparece por frecuentemente en la Matemática. Es la base de multitud de demostraciones de Geometría y de Trigonometría, en particular.

Como se mencionó en la sección 1.1, los babilonios y los egipcios tenían conocimiento de este teorema. También fue conocido en China en la antigüedad. No se conoce que haya habido relación alguna entre Mesopotamia y China en esta época por lo que se presume que fue un descubrimiento independiente en ambas culturas. Este teorema es la aportación fundamental del texto matemático más antiguo en China, el Chou Pei Suang Chin, un tratado de cálculos astronómicos que incluye algunos resultados sobre el triángulo rectángulo y sobre el uso de fracciones. No se sabe con certeza la época en que fue escrito ya que diversos autores lo sitúan desde alrededor del año 1000 hasta alrededor del año 300 a.C.

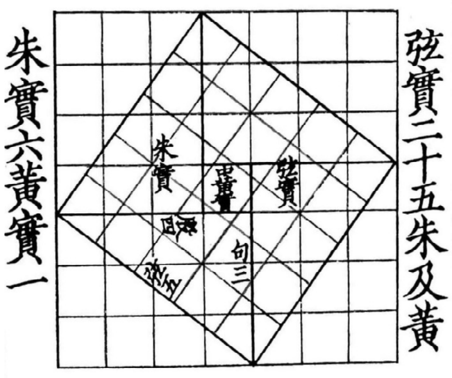


Ilustración 1.8

El Diagrama de la hipotenusa* del tratado Chino *Chou-Pei Suan-Ching ilustra
una demostración del *Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5.*

Aún cuando el diagrama ilustra el caso de lados 3, 4 y 5, ha servido de base para la demostración que se presenta a continuación.

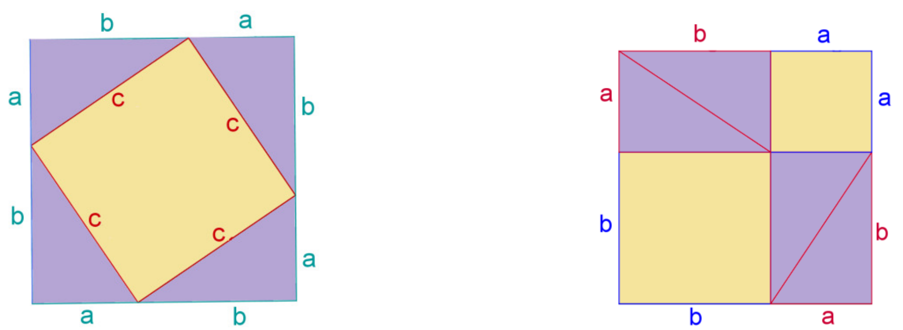


Figura 1.28

Considérese un triángulo rectángulo de catetos a, b y de hipotenusa c. Se construye un cuadrado de lado $a + b$. Por un lado se divide el cuadrado de lado $a + b$, en un cuadrado de lado c y cuatro triángulos rectángulos congruentes al triángulo dado. Como se ilustra en el cuadrado de la izquierda en la figura 1.27. Entonces se puede calcular el área del cuadrado K como:

$$K = c^2 + 4(\frac{ab}{2}) = c^2 + 2ab.$$

Por otro lado se divide el cuadrado de lado $a + b$ en dos cuadrados uno de lado a, otro de lado b y dos rectángulos de lados a y b, como se ilustra en el cuadrado de la derecha en la figura 1.64. Se tiene entonces que:

$$K = a^2 + b^2 + 2ab.$$

De donde $a^2 + b^2 = c^2$, como se quería demostrar.

Se ha demostrado el teorema de Pitágoras: *la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa.*

Corolario 1: Si dos triángulos rectángulos tienen respectivamente iguales un cateto y la hipotenusa son congruentes.

Corolario 2: Desde un punto O fuera de una recta m, la perpendicular es la más corta de las rectas que pueden trazarse de O a m.

Ejercicios

71) *Enuncie y demuestre el inverso del Teorema de Pitágoras.*

72) *Demuestre los dos corolarios del Teorema de Pitágoras.*

73) *Demuestre el Teorema de Pitágoras usando los resultados de semejanza de triángulos.*

74) *Demuestre que la distancia más corta de un punto a una recta es sobre la perpendicular.*

75) *Demuestra que dos triángulos rectángulos son congruentes si su hipotenusa y uno de sus catetos son iguales, respectivamente.*

76) *Dados m una recta, O un punto fuera de m y H el pie de la perpendicular de O a m. Demuestre que si P y Q son puntos en m tales que PH < QH, entonces OP < OQ y que si PH = QH, entonces OP = OQ.*

77) *Demuestre que en todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él y que el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

78) *Se llama proyección de un punto sobre una recta al pie de la perpendicular trazada desde el punto a la recta. Se entiende por proyección de un segmento sobre una recta al segmento formado por las proyecciones de sus puntos sobre la recta.*

79) *Demuestre que el área K de un triángulo de lados a, b y c está dada por la siguiente ecuación que se atribuye a Herón de Alejandría (siglo I):*

$K = \sqrt[2]{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$, *donde* $s = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro del triángulo).

1.11. Círculos, ángulos y cuadriláteros

Círculos

Como se recordará, en un círculo se llama:

Radio. A un segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma.

Cuerda. A un segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia.

Diámetro. A toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Secante. A una recta que corta a la circunferencia en dos puntos distintos.

Tangente. A una recta que tiene solamente un punto común con la circunferencia.

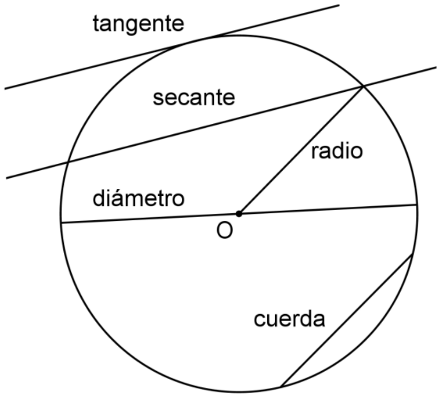


Figura 1.29

Se ha visto que dos puntos determinan una única recta, ¿cuántos puntos determinarán un único círculo?

Supóngase que se tienen dos puntos, ¿cuántos círculos pasarán por esos dos puntos?

Para encontrar el centro de un círculo que pasa por dos puntos *P* y *Q*, se requiere encontrar un punto que equidiste de estos dos puntos, esto es, tendrá que estar en la mediatriz del segmento *PQ*. Pero, todos los puntos de la mediatriz equidistan de *P* y de *Q*, por tanto todos los puntos de la mediatriz son centro de un círculo que pasa por *P* y por *Q*.

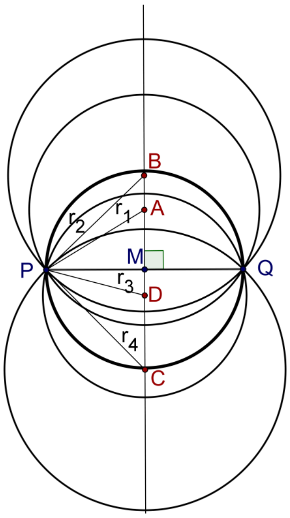


Figura 1.30

En la figura 1.30 se tienen dos puntos P y Q, M es el punto medio del segmento PQ y la perpendicular por M a PQ es la mediatriz del segmento. Cualquier punto A, B, C, etc. sobre la mediatriz es centro de un círculo que pasa por P y Q. Basta trazar el círculo con centro en A, B, etc., y de radio r_i igual a la distancia de ese punto a P o a Q y este círculo pasa por los dos puntos. Así, se tiene un número infinito de círculos que pasan por dos puntos, uno con centro en cada punto de la mediatriz. El de radio menor es el que tiene centro en M, ya que como se ha visto $PM < r_i \ \forall r_i$, (ejercicio 72),donde r_i es la distancia de cualquier punto de la mediatriz a P o a Q.

Considérense ahora tres puntos no colineales, ¿cuántos círculos pasan por esos tres puntos?

Sean P, Q y R tres puntos no colineales.

Para que un punto C sea centro de un círculo que pase por P y Q tiene que estar en la mediatriz de PQ, como se vio en el ejemplo anterior; pero C también tiene que estar a la misma distancia de R, por lo que tiene que estar en la mediatriz de QR. Entonces, C es el punto de intersección de la mediatriz de PQ y de QR. Estas dos mediatrices sólo son paralelas cuando PQ y QR son colineales o paralelos, pero no son paralelos ya que tienen a Q en común y no son colineales por hipótesis. Entonces, en nuestro caso estas dos mediatrices se intersecan en un punto C que equidista de los tres puntos.

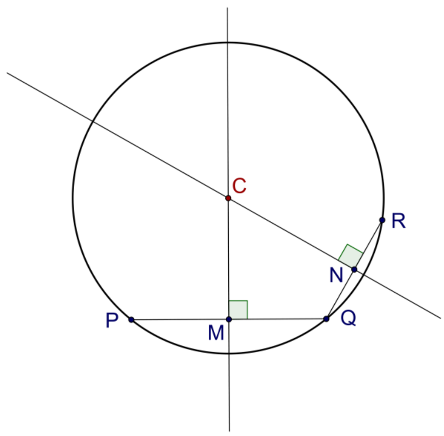


Figura 1.31

En la figura 1.31 los puntos M y N son los puntos medios de los segmentos PQ y QR y las perpendiculares a los segmentos en esos puntos son sus mediatrices. C es su punto de intersección y por tanto centro del círculo que pasa por P, Q y R.

El centro del círculo C es único, ya que la intersección de las dos mediatrices es única. Asimismo el radio r está determinado también en forma única por la distancia $CP = CQ = CR = r$. Esto nos indica que el círculo es único. Se ha demostrado entonces el siguiente teorema:

Teorema 1.11.1
Existe un único círculo que pasa por tres puntos no colineales.

Dos observaciones:

a) La mediatriz del segmento PR, que no está trazada en la figura, pasa también por C, ya que $CP = CR = r$.

b) Se ha probado que por tres puntos no colineales pasa un único círculo, lo cual es equivalente a decir que por los vértices de cualquier triángulo pasa un único círculo y que su centro es el punto de intersección de sus mediatrices. Se dice entonces que el triángulo está *inscrito* en el círculo y que el círculo está *circunscrito* al triángulo. En particular al círculo que pasa por los tres vértices de un triángulo se le llama el *circuncírculo* del triángulo y a su centro el *circuncentro* del triángulo. Cabe mencionar que el circuncentro no siempre está en el interior del triángulo. Se deja al estudiante como ejercicio que determine en qué casos está fuera y en cuáles dentro del triángulo.

Dado que tres puntos no colineales determinan un círculo, si se consideran cuatro puntos, no colineales por tercias, ¿habrá algún círculo que pase por esos puntos, o qué condiciones tendrán que cumplir para que estén sobre un círculo?

Ejemplo 1.11.1
Supóngase que P, Q, R y S son los vértices de un cuadrado.

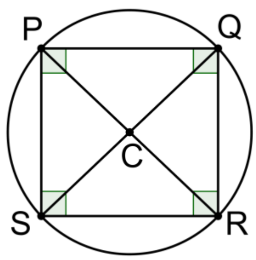


Figura 1.32

Se trazan las diagonales PR y QS y se tiene:

$PR = QS$, por el resultado del ejercicio 20,

$SC = CQ$ y $RC = CP$, por el ejercicio 16, de donde

$SC = CQ = RC = CP$,

esto es, *C* equidista de *P*, *Q*, *R* y *S* y por tanto es centro de un círculo que pasa por estos puntos. El radio *r* es igual a la distancia común de *C* a cualquiera de esos puntos. Se ha demostrado entonces que cualquier cuadrado es inscriptible en una circunferencia.

De hecho, en la demostración solamente se usó la propiedad del cuadrado de ser rectángulo (diagonales iguales y que se bisecan), por lo que esta demostración es igualmente válida para el rectángulo, por lo que también se puede afirmar que cualquier rectángulo es inscriptible en una circunferencia.

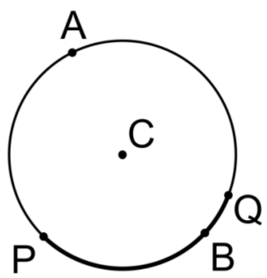
¿Será entonces cualquier paralelogramo inscriptible en una circunferencia?

En el caso general de los cuadriláteros existen inscriptibles y no inscriptibles. A los cuadriláteros inscriptibles también se les llama cíclicos. Como se ha visto puede haber cuadriláteros cuyos lados sean iguales y tal que unos sean inscriptibles y otros no, así que se buscará alguna condición sobre sus ángulos que permita conocer cuando un cuadrilátero es inscriptible. Para ello se verá la relación entre los ángulos inscritos, que tienen en su vértice en la circunferencia, y los arcos que abarcan.

Ángulos centrales e inscritos y cuadriláteros

Dos puntos *P* y *Q* en un círculo lo dividen en dos partes a las que se denomina arcos. En general se denota como al menor de los arcos determinados por *P* y *Q*.

En la figura 1.33 se denota con al arco menor de los determinados por los puntos *P* y *Q*. Para evitar ambigüedad en ocasiones se denotan los arcos con tres literales. En la misma figura, el arco menor es el arco y el mayor es el , en esta forma queda más claro a cuál de ellos se está uno refiriendo.



$\widehat{PQ}$

Figura 1.33

Si el contexto permite saber con certeza de cuál de los arcos se trata, se utiliza la notación con dos literales, de la misma forma en que se utiliza la notación $\angle A$, en lugar de $\angle AOB$.

¿Cómo se mide un arco? La manera más común para medirlo es por la fracción de círculo que abarca. Esto nos lleva a conocer cuánto mide la circunferencia.

Desde la antigüedad era conocido que en los círculos se mantiene una relación constante entre su perímetro y su diámetro, independientemente de su tamaño. A esta constante es a la que se ha llamado π desde el siglo XVII. Aparentemente el nombre proviene de la palabra "peripheria", que era el nombre que daban los griegos al perímetro de un círculo, y cuya inicial en griego es precisamente π.

A lo largo de la historia se han obtenido valores cada vez más aproximados (más cifras decimales) para esta constante. Para calcular el área del círculo los egipcios tomaban esta constante como $3\frac{1}{6}$. Arquímedes utilizó polígonos regulares de 96 lados, inscritos y circunscritos a la circunferencia, para obtener la estimación $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ [8]. En el siglo XVII con el desarrollo del análisis se realizaron mejores aproximaciones de π a través de la utilización de series y productos infinitos. En la actualidad el uso de las computadoras ha permitido calcular un gran número de sus decimales.
Fue hasta finales del siglo XVIII que se demostró que π es un número irracional (no se puede expresar como una fracción) y hasta el siglo XIX se demostró que es un número trascendente (que no es raíz de un polinomio con coeficientes enteros).

De la definición del número π, se tiene que la longitud de una circunferencia de radio *r* es $2\pi r$ y de NP (17 y 18) se obtiene que:

Teorema 1.11.2

La medida numérica de un ángulo central es la misma que la del arco que subtiende. Esto generalmente se expresa en como "la medida de un ángulo central es la misma que la del arco que abarca o subtiende".

Dos las unidades de medida más usadas son el grado (o grado sexagesimal) y el radián.

Para definir el grado se toma como unidad para medir la circunferencia un arco $\hat{u} = \frac{1}{360} C$, donde C es la longitud total de la circunferencia. Al ángulo que abarca este arco se le llama grado y se usa el símbolo º para denotarlo. En la figura 1.34 se tiene $\hat{u} = \widehat{PA_1}$ y $\angle POA_1 = \varepsilon = 1º$.

De la definición y el teorema 1.11.2 es claro que el ángulo central que abarca toda la circunferencia es de 360º.

[8] Boyer, Carl. A History of Mathematics. New York: Wiley International, 1968.

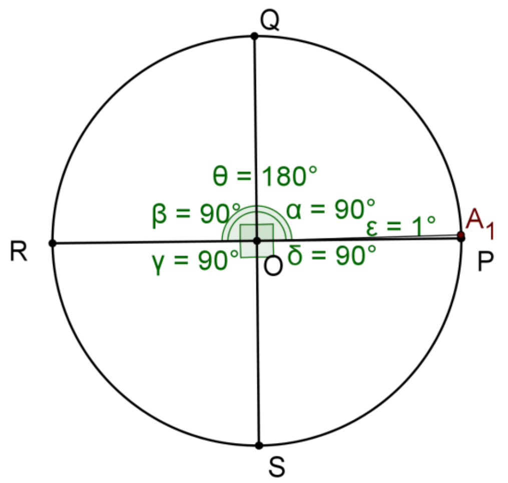


Figura 1.34

Si se trazan dos diámetros perpendiculares los cuatro ángulos formados son iguales a un recto cada uno y por NP 17 abarcan arcos iguales, por lo que cada uno de ellos es de un cuarto de circunferencia, es decir cada ángulo es de un cuarto de 360º, por lo que cada uno de ellos es de 90º. Un ángulo de lados colineales abarca la mitad del círculo, por tanto es de 180º.

El origen del grado (sexagesimal) se remonta a los babilonios que dividían la circunferencia en 360 partes (al igual que los días que tenía su calendario sin contar los 5 días de festividades); también de ellos proviene la división del grado en 60 minutos y el minuto en 60 segundos (de ahí su nombre de sexagesimal). Ya en la sección 1.1 se mencionó que el sistema de numeración de los babilonios era sexagesimal. La persistencia de este sistema en la medida de los ángulos se debe seguramente a su adopción por los griegos para los desarrollos aritméticos y a que casi la totalidad de los aparatos para medición de ángulos como los sextantes, teodolitos, brújulas, etc., están graduados según este sistema.

Actualmente las calculadoras científicas pueden trabajar con este sistema de grados sexagesimales, a los que llamaremos grados simplemente, con grados centesimales o con radianes. En este curso no se trabajará con los ángulos centesimales ya que prácticamente no se utilizan, solamente se menciona que en este caso se divide la circunferencia en 400 partes, de tal manera que un ángulo recto mide 100 grados centesimales. La primera mención a este sistema de medida de los ángulos fue en el siglo XV y se trató de implantar en Francia durante el siglo XVIII. Algunos instrumentos náuticos todavía lo utilizan.

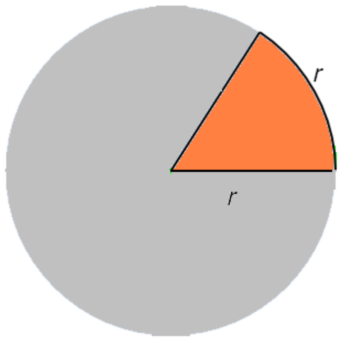


Figura 1.35

Un ángulo central que abarca un arco de longitud igual al radio del círculo recibe el nombre de radián.

En la figura 1.35 el ángulo marcado es de un radián.

Dado que la longitud de cualquier circunferencia es $2\pi r$, si se toma como unidad de medida el radián, se tiene entonces que la medida del ángulo $\theta =$ 360º expresada en radianes es de 2 π radianes.

Entonces, de acuerdo con el teorema 1.12.3, un ángulo de 180º es de π radianes y uno de 90º es de π/2 radianes.

En la figura 1.36 se presenta la medida de algunos ángulos expresadas tanto en grados como en radianes.

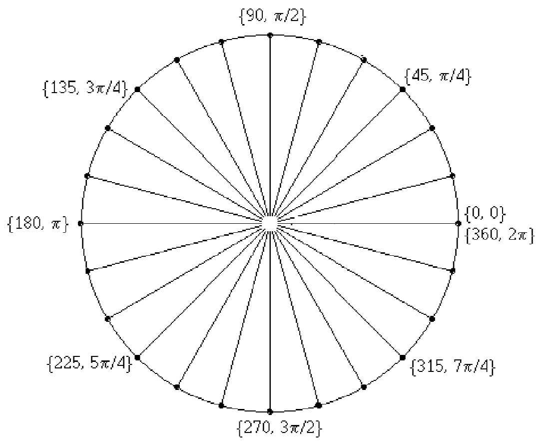


Figura 1.36

Volviendo a plantear la pregunta original: ¿cuál es la relación entre los ángulos inscritos y el arco que abarcan?

Teorema 1.11.3

La medida de un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad de la medida del arco que abarca.

Demostración:

Sea C círculo con centro en O y α un ángulo inscrito con vértice en R que está en C y que subtiende el arco . La base de la demostración es probar que α es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco, con lo cual quedará demostrado el teorema.

Se trazan los radios OP y OQ y se considera el ángulo central β que subtiende el mismo arco La demostración se dividirá en tres casos:

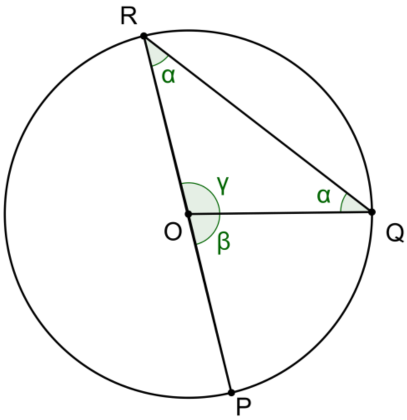


Figura 1.1

a) Cuando P, O y R (o bien Q, O y R) son colineales.

Considérese el ΔORQ, $OR = OQ$, por ser radios, por tanto el triángulo es isósceles y el ángulo interior en Q es igual a α.

Además β, el ángulo central que subtiende el mismo arco, es ángulo exterior adyacente al tercer ángulo del triángulo γ. Por tanto, por el corolario del teorema 1.7.2, $\beta = 2\alpha$, como se quería demostrar.

b) Cuando O está en el interior del ángulo $\angle PRQ = \alpha$.

Se traza el diámetro que pasa por R. Considérese ΔORP y ΔORQ. Por el resultado del inciso anterior se tiene que $\beta_1 = 2\alpha_2$ y $\beta_2 = 2\alpha_1$. Además $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ y $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Por tanto, $\beta = 2\alpha$, como se quería demostrar.

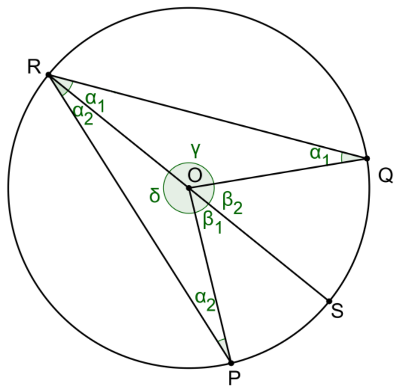


Figura 1.38

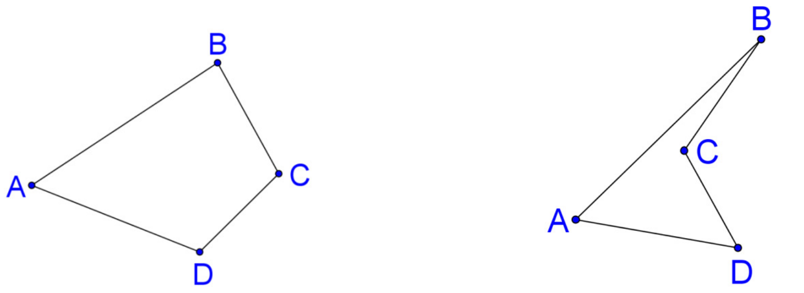
c) En el caso en que el centro O del círculo esté fuera del ángulo se traza igualmente el diámetro RS y se obtienen las dos mismas igualdades que en el caso anterior, sólo que para obtener el ángulo α en lugar de que se sumen se restan.

Una consecuencia directa de este teorema es la condición que se está buscando sobre los ángulos de los cuadriláteros inscriptibles.

Pero antes de continuar haremos un pequeño paréntesis para indicar que en este curso se trabajará solamente con polígonos convexos.

A los polígonos cuyos ángulos son menores que dos rectos se les llama convexos y a los que tienen algún ángulo mayor a dos rectos cóncavos. Obsérvese que cualquier cuadrilátero no puede tener más de un ángulo mayor a dos rectos. Obsérvese que los paralelogramos son convexos.

En la figura 1.39 se presenta un ejemplo de un cuadrilátero convexo, que es con los que se ha estado y se seguirá trabajando, y de un cuadrilátero cóncavo.



Cuadrilátero convexo *Cuadrilátero cóncavo*

Figura 1.39

Teorema 1.11.4

Un cuadrilátero es inscriptible si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

Demostración:

Sea el $\square PQRS$ inscrito en un círculo. Sean $\angle PQR = \alpha$ y $\angle RSP = \beta$.

El ángulo α es inscrito y abarca el arco $\widehat{PSR}$; el ángulo β también es inscrito y abarca el arco $\widehat{RQP}$.

Además, $\widehat{PSR} + \widehat{RQP} = 2\pi$, por tanto, por el teorema 1.11.3 se tiene $\alpha + \beta = \pi$, como se quería demostrar. Observe que los otros dos ángulos del cuadrilátero también son suplementarios ya que la suma de los cuatro ángulos es igual 2π radianes.

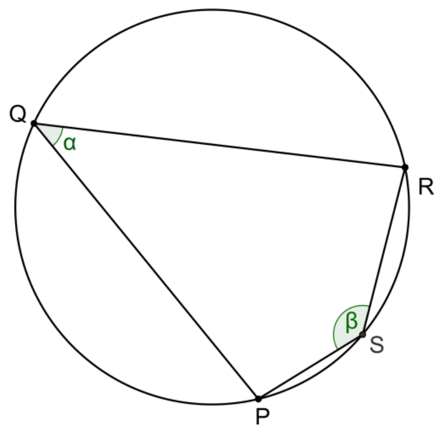


Figura 1.40

Ahora se demostrará que la condición de los ángulos opuestos suplementarios no sólo es necesaria sino también es suficiente para que el cuadrilátero sea inscriptible; es decir, se demostrará que un cuadrilátero que tenga un par de ángulos opuestos suplementarios es inscriptible.

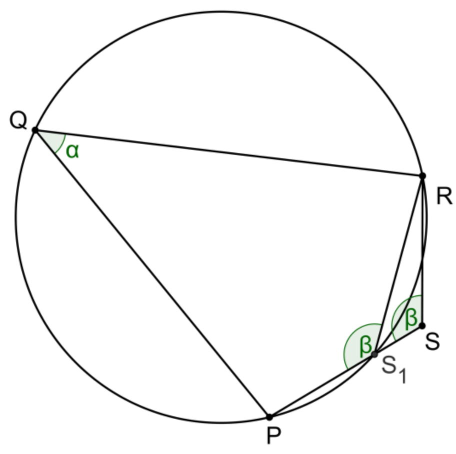


Figura 1.41

Sea el □*PQRS* y sean $\angle PQR = \alpha$ y $\angle RSP = \beta$ tales que $\alpha + \beta = \pi$. Se traza el círculo que pasa por los vértices *P*, *Q* y *R* (teorema 1.12.1). Supóngase que este círculo no pasa por *S*, se traza el segmento *SP* y se llama S_1 al punto de intersección de *PS* con el círculo. El cuadrilátero □$PQRS_1$ es inscriptible por construcción, por tanto $\angle PS_1R$ es suplementario de α, por el resultado anterior y ya que α y β son por hipótesis suplementarios, se tiene que $\angle PS_1R = \beta$.

Estos dos ángulos son correspondientes e iguales, por tanto, por el ejercicio 11, *RS* y RS_1 son paralelas, pero estas dos rectas tienen a *R* como punto común, por lo tanto no pueden ser paralelas. Esto es, del hecho de que el círculo determinado por *P*, *Q* y *R* no pase por *S*, se ha llegado a una contradicción, por tanto el círculo tiene que pasar por *S*, como se quería demostrar.

A la luz de este resultado demostrar que los únicos paralelogramos inscriptibles son los rectángulos es inmediato, ya que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales y para ser inscriptibles tienen que ser suplementarios, por tanto tienen que ser rectos.

Ejercicios:

80) *Indique en qué casos está el circuncentro dentro del triángulo y en cuáles fuera.*

81) *Demuestre que:*

   a) *La medida del ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan dentro del círculo es igual a la de la semisuma de los arcos que abarca.*

   b) *La medida del ángulo formado por dos secantes que se intersecan en un punto exterior al círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que abarca.*

   c) *Un ángulo inscrito es recto si y sólo abarca un diámetro.*

   d) *Dos ángulos inscritos que abarcan la misma cuerda son iguales o suplementarios.*

82) *Dado un triángulo isósceles ΔABC. Por un punto D en el lado AB se traza una paralela al lado BC, si E es el punto de intersección de esta paralela con AC, demuestre que el cuadrilátero BDEC es inscriptible.*

83) *Demuestre que la mediatriz de una cuerda cualquiera en un círculo pasa por el centro del círculo.*

84) *Demuestre que un círculo dos cuerdas tienen la misma longitud si y sólo si están a la misma distancia del centro del círculo.*

85) *Demuestre que de un par de cuerdas en un círculo, la mayor está más cerca del centro.*

86) *Demuestre que el diámetro es la cuerda de longitud máxima en un círculo dado.*

87) *Una recta corta dos círculos concéntricos determinando la cuerda XY en el más grande y la cuerda PQ en el menor. Demuestre que XP = QY.*

88) *Demuestre que si PQ y RS son dos cuerdas paralelas en un círculo, entonces PR = QS.*

89) *Dado un círculo de radio r, encuentre el rectángulo inscrito de área máxima.*

90) *Demuestre que todo polígono regular es inscriptible. Recuerde que un polígono regular es el que tiene sus lados y sus ángulos iguales.*

91) *Demuestre que todo trapecio isósceles es inscriptible.*

92) *En un triángulo ABC, demuestre que el ∠A es recto sí y solo sí la mediana del triángulo que va de A al lado BC es exactamente la mitad de BC.*

93) *Dos círculos se cortan en los puntos P y Q. Se trazan los diámetros de los dos círculos que pasan por P. Sean X y Y los puntos de intersección de estos diámetros con cada uno de los círculos. Demuestre que la recta XY pasa por el punto Q.*

94) *Sean A, B, C y D los vértices consecutivos de un cuadrilátero cíclico y sean W, X, Y y Z los puntos medios de* $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ *y* $\widehat{DA}$ *respectivamente. Demuestre que las cuerdas WY y XZ son perpendiculares.*

95) *Dado un pentágono regular, construye un círculo circunscrito al pentágono. ¿Existe siempre? Justifique su respuesta.*

96) *Dado un círculo C y dos puntos P y Q exteriores al círculo. Se trazan dos secantes por cada uno de los puntos exteriores de tal forma que se que*

cortan sobre el círculo en cuatro puntos A, B, C y D. Demuestre que las bisectrices PX y PY de los $\angle P$ y $\angle Q$ son perpendiculares.

97) *Encuentre el cuadrilátero de área máxima que puede inscribirse en un círculo.*

98) *Sean P un punto en el plano y C un círculo dado, para cualquier recta que pase por P y corte al círculo C en dos puntos Q y R, el producto $PQ \times PR$ es constante. Considere el punto P tanto dentro como fuera del círculo. A esta constante se la llama la potencia del punto con respecto al círculo.*

1.12. Tangentes al círculo

Teorema 1.14.3

Una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.

Demostración:

Sea *C* un círculo con centro en *O* y radio *r*. Sea *P* un punto en el círculo *C* y sea *m* la tangente al círculo en *P*. Se traza el radio *OP* del círculo, por tanto *OP* = *r*. Se quiere demostrar que $OP \perp m$. Para ello se supondrá que *OP* no es perpendicular a *m* y se llegará a una contradicción.

Si *OP* no es perpendicular a *m*, desde *O* se puede trazar una perpendicular a *m*. Sea *Q* el pie de la perpendicular. Sea *s* =*OQ*. Entonces $s < r$, por el corolario 2 del teorema de Pitágoras, y *Q* está en el interior del círculo. Pero si *Q* está en el interior del círculo, entonces *m* corta al círculo en dos puntos, por Np15, contrario a la hipótesis de que *m* es tangente al círculo. Por tanto $OP \perp m$, como se quería demostrar.

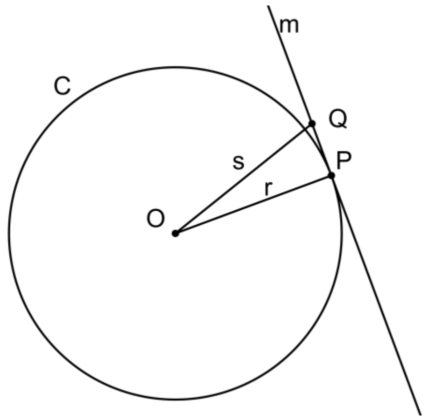


Figura 1.2

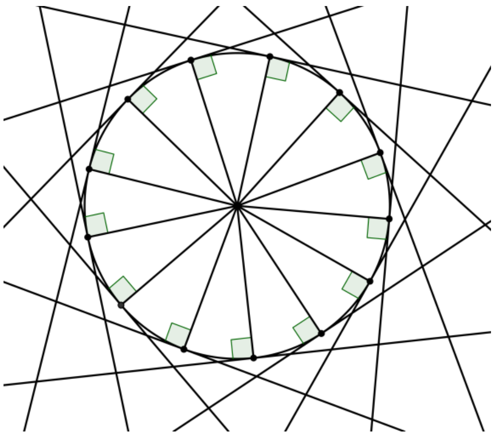


Figura 1.43

Corolario 1: Por cada punto en el círculo existe una tangente al círculo en ese punto.

Corolario 2: La tangente a un círculo en un punto sobre el círculo es única.

Corolario 3: La perpendicular a una tangente al círculo en el punto de contacto pasa por su centro.

Los resultados anteriores indican que para trazar una tangente al círculo por un punto del mismo sólo hay que trazar un radio al punto de tangencia y la tangente será la perpendicular al radio por ese punto.

¿Cómo proceder en el caso en que el punto por el que se quiere trazar la tangente no esté en el círculo?

Sea C un círculo con centro en O y radio r y sea P el punto desde donde se quiere trazar la tangente al círculo. Se observa en primer lugar que solamente se pueden trazar tangentes desde un punto exterior, ya que toda recta por un punto interior del círculo corta al círculo en dos puntos por Np15. Sea entonces P un punto exterior al círculo. Si se supone que existe la tangente al círculo desde P, entonces es perpendicular al radio en el punto de contacto; por tanto, para trazar la tangente habrá que determinar un punto Q en el círculo tal que las rectas OQ y PQ sean perpendiculares. Entonces, con base en las propiedades de los ángulos inscritos se realiza la siguiente construcción:

Se traza la recta OP y se construye M su punto medio. Se traza un círculo C_1 con centro en M y radio MO. El círculo C_1 pasa por P por construcción. Sean Q y R las intersecciones de los círculos C y C_1 (Np14). Las rectas PQ y PR son tangentes al círculo C en Q y R respectivamente.

Demostración:

Se trazan los radios OQ y OR, entonces los ángulos $\angle OQP$ y $\angle ORP$ son inscritos en el círculo C_1 y abarcan un diámetro, por tanto son rectos y OQ es perpendicular a PQ en el punto Q y OR es perpendicular PR en el punto R, como se quería demostrar.

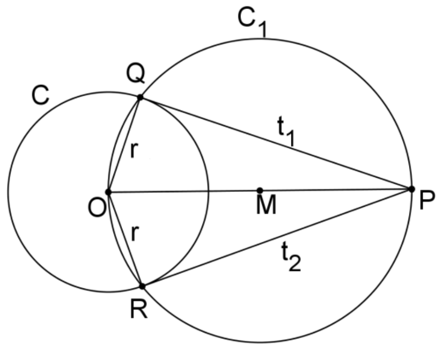


Figura 1.3

De la construcción y la demostración anterior se concluye que por cada punto exterior al círculo pasan dos tangentes al círculo. Estas tangentes tienen la misma longitud y forman el mismo ángulo con la línea que une el centro del círculo y el punto desde donde se trazan las tangentes. Se deja como ejercicio la demostración.

Un par de círculos puede tener una o varias tangentes comunes o no tener tangente común, dependiendo de la magnitud de sus radios y de la distancia entre sus centros.

Una tangente común a dos círculos se llama externa si corta la línea de los centros en un punto que no está en el segmento determinado por los centros de los círculos y se llama interna si la corta en un punto que está en el segmento.

En las figuras siguientes se presenta de forma esquemática los casos en que no tienen tangente común o tienen una o dos tangentes comunes. Se deja al lector que realice las figuras para los casos de tres o cuatro tangentes comunes.

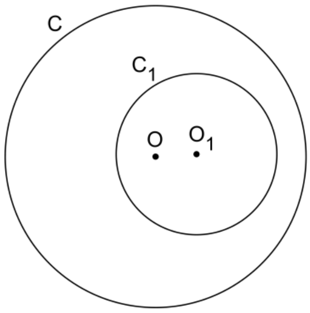


Figura 1.45

Ninguna tangente común

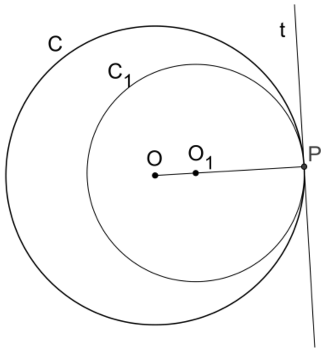


Figura 1.4

Una tangente común

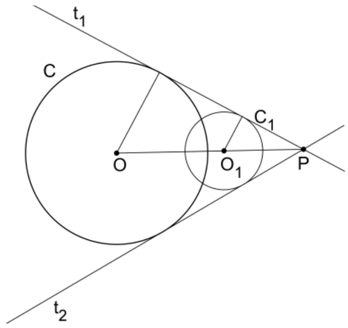


Figura 1.5

Dos tangentes comunes

Para construir una tangente común a dos circunferencias se supondrá que se tiene resuelto el problema.

Sean C y C_1 dos círculos con centro en O y O_1 y radios r y r_1 respectivamente. Supongamos que se tiene las dos tangentes externas t_1 y t_2 que se intersecan en P y sean Q y Q_1 los puntos de tangencia de t_1 en C y C_1, respectivamente. Se tiene entonces que $OQ = r$ es perpendicular a t_1 y $O_1Q_1 = r_1$ también, por el teorema 1.14.3; por lo tanto los radios a los puntos de contacto de la tangente común OQ y O_1Q_1 son paralelos. Si se traza una paralela m_1 a QQ_1 por el punto O_1, se obtiene un rectángulo QQ_1O_1D, donde D es la intersección de m_1 con el radio OQ. Ahora, $OD = r - r_1$ y es perpendicular a m_1. Si se traza un círculo C_2 con centro en O y radio $OD = r - r_1$, la recta m_1 es perpendicular a OD, por tanto es la tangente al círculo C_2 desde O_1.

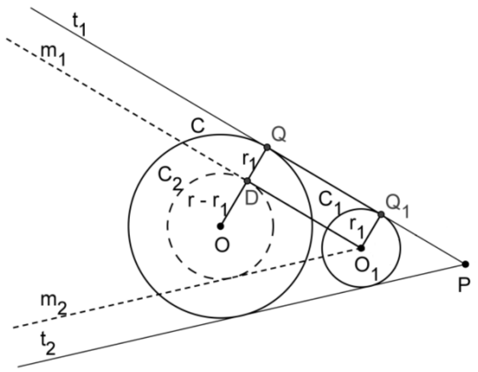


Figura 1.6

La figura es simétrica con respecto a la línea de los centros, por tanto la tangente m_2 a C_2 desde O_1 es también paralela a la tangente común t_2.

De la situación anterior se puede ver que para construir las tangentes comunes externas se traza un círculo C_2 con centro en O, de radio $r - r_1$ y se trazan las tangentes m_1 y m_2 desde O_1 a C_2. Si D y D' son los puntos de contacto de estas tangentes, se trazan los radios OD y OD' y se prolongan hasta que corten a la circunferencia C en Q y R respectivamente. Estos puntos Q y R son los puntos de contacto de las tangentes comunes con C, por tanto basta trazar las perpendiculares a OQ y OR y se tendrán dos rectas t_1 y t_2 tangentes a la circunferencia C. Resta demostrar que son tangentes a C_1, lo cual se deja como ejercicio al lector.

Ejercicios:

99) *Demuestre que las tangentes a un círculo desde un punto dado P tienen la misma longitud y forman ángulos iguales con la recta que une el punto y el centro del círculo.*

100) *Un triángulo ΔABC está formado por las intersecciones de tres tangentes a un círculo. Dos tangentes AP y AQ son fijas, mientras de BC toca a la circunferencia en un punto variable R. Demuestre que el perímetro del triángulo es constante e igual a 2AP.*

101) *Demuestre que el ángulo formado por una tangente y una cuerda que pasa por el punto de tangencia es igual a la mitad del ángulo subtendido por la cuerda.*

102) *Demuestre que la línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es la mediatriz de la cuerda común.*

103) *Demuestre que si dos círculos son tangentes, la línea de los centros pasa por el punto de contacto. Recuerde que dos círculos son tangentes si son tangentes a la misma recta en el mismo punto.*

104) *Trace las tangentes comunes externas e internas a dos círculos, considere todos los casos.*

105) *Demuestre que la potencia de un punto P con respecto a un círculo con centro en el punto O y radio r, es igual a* $PO^2 - r^2 = PT^2$, *donde PT es la longitud de la tangente desde P al círculo, siempre que P sea exterior al círculo.*

106) *Inscribir en un círculo dado un triángulo semejante a un triángulo dado (proposición 2 del Libro IV).*

107) *Construir un triángulo isósceles tal que cada uno de sus ángulos iguales sea el doble del ángulo restante (proposición 10 del Libro IV).*

108) *Inscribir un péntagono regular en un círculo dado (proposición 11 del libro IV).*

2. Geometría del triángulo

2.1. Puntos notables que aparecen en la geometría elemental

El triángulo es una de las figuras más estudiadas de la geometría elemental; esto se debe, indudablemente, a sus múltiples aplicaciones derivadas de la propiedad que tiene de ser "rígido". Esto es, si se construye un triángulo con tres varillas de longitud fija, aún cuando tratemos de moverlo, el triángulo se conserva rígido, sus ángulos quedan determinados de manera única (Np9). Si en vez de construir un triángulo, se construye en la misma forma un polígono, un cuadrilátero en este caso, se puede mover, ya que dada la longitud de sus lados, la magnitud de sus ángulos no queda determinada de manera única.

Ilustración 2.4

A esta propiedad obedece que para calcular el área o suma de los ángulos interiores de formas regulares e irregulares, se dividen en triángulos (se dice que las triangulamos).

En este capítulo se estudian algunas propiedades interesantes del triángulo, y otras figuras relacionadas directamente con él, además de que se recuperan algunos de los resultados que se demostraron en el capítulo anterior.

Se considera conveniente utilizar notación estándar para trabajar en este capítulo. A los vértices de los triángulos los denotamos con letras mayúsculas *A*, *B* y *C*. Al triángulo se le denota entonces como ΔABC. Así, los lados del triángulo se denotan como *AB*, *BC*, *CA* o con letras minúsculas *a, b* y *c*. En este último caso, se denota como *a* al lado opuesto al vértice *A*, como *b* al opuesto al vértice *B* y como *c* al opuesto al *C*.

Los puntos medios de los lados del triángulo se denotan como *L*, *M* y *N*. Los pies de las alturas como *D*, *E* y *F*. Se consideran los puntos *L* y *D* en el lado opuesto al vértice *A*, *M* y *E* en el opuesto al *B* y *N* y *F* en el opuesto a *C*.

Teorema 2.1.1

Las mediatrices de un triángulo son concurrentes en un punto llamado circuncentro. Este punto es el centro del círculo circunscrito al triángulo o circuncírculo.

Las medianas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado centroide o baricentro. El centroide triseca cada una de las medianas.

Las alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro.

Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes en un punto llamado incentro. Este punto es el centro del círculo inscrito en el triángulo o incírculo.

Las bisectrices de dos de los ángulos exteriores y la del interior no adyacente de un triángulo concurren por tercias en tres puntos llamados excentros. Estos puntos son centro de círculos tangentes externamente a los lados del triángulo.

Demostración:

1) En el capítulo 1 se demostró que las mediatrices de un triángulo son concurrentes y que el circuncentro es el centro del circuncírculo (teorema 1.11.1).
2) En el capítulo 1 se demostró también que las medianas de un triángulo son concurrentes (problema 66).
3) En el capítulo 1 se demostró que el centroide es punto de trisección de las medianas (problema 67).
4) Se demostrará que las alturas de un triángulo son concurrentes.

   Sea ABC un triángulo y AD la altura por el vértice A. Se traza por A una paralela a BC, por B una paralela a AC y por C una paralela a AB. Sea el triángulo $A'B'C'$, formado por esas paralelas. El cuadrilátero $ABCB'$ es un paralelogramo, por tanto $BC = AB'$. El cuadrilátero $BCAC'$ también es un paralelogramo, de donde $BC = C'A$; por tanto $C'A = AB'$ y AD es mediatriz de $B'C'$.

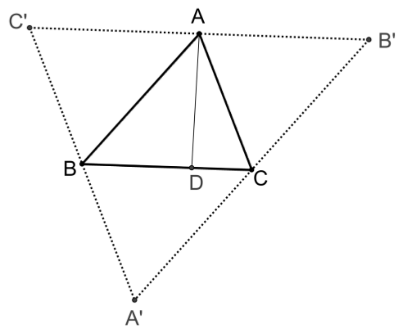


Figura 2.1

   De manera análoga se demuestra que las alturas BE y CF del triángulo son mediatrices de los segmentos $C'A'$ y $A'B'$, respectivamente. Por tanto, las alturas del ΔABC son mediatrices del $\Delta A'B'C'$ y por tanto son concurrentes.

5) Se demostrará que las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes.

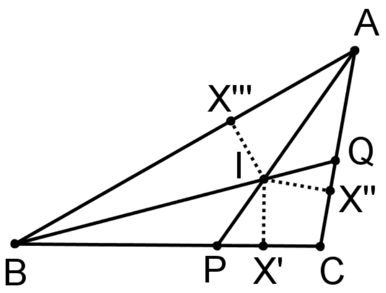


Figura 2.2

Sea ΔABC y AP y BQ las bisectrices de $\angle A$ y $\angle B$, respectivamente. Sean P y Q los pies de la bisectrices por $\angle A$ y $\angle B$, respectivamente. Las rectas AP y BQ se cortan en un punto I (NP5). Sea I el punto de intersección de estas dos rectas. Se trazan perpendiculares a los lados del triángulo desde I. Sean X', X'' y X''' los pies de estas perpendiculares en BC, CA y AB respectivamente.

I en la bisectriz de $\angle B \Rightarrow IX' = IX'''$,

I en la bisectriz de $\angle A \Rightarrow IX'' = IX'''$.

Por tanto $IX' = IX'' \Rightarrow I$ está en la bisectriz de $\angle C$ (problema 53, capítulo 1) y las tres bisectrices son concurrentes.

Ahora, ya que la distancia de I a los tres lados del triángulo es la misma, el círculo con centro en I con radio igual a esta distancia, pasa por los tres puntos X', X'' y X'''. Más aún, ya que IX', IX'' e IX''' son perpendiculares a los lados del ΔABC, el círculo es tangente a los tres lados del triángulo en estos puntos (teorema 1.14.3). A este círculo se le llama el incírculo del triángulo.

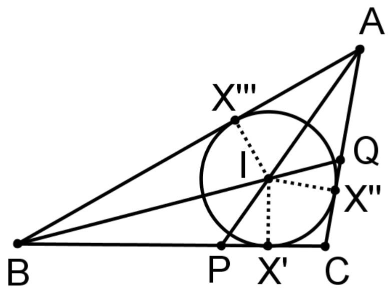


Figura 2.3

6) Se demostrará que dos bisectrices de los ángulos exteriores y la del interior no adyacente de un triángulo son concurrentes.

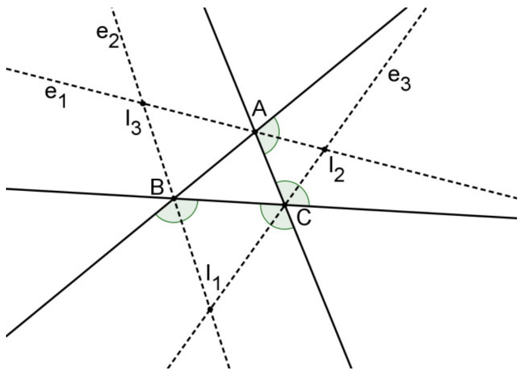


Figura 2.4

Sea el ΔABC. En la figura 2.4 se han trazado las prolongaciones de sus lados. Se trazan las bisectrices de los ángulos exteriores. Se llama e_1, e_2 y e_3 a las bisectrices exteriores por A, B y C respectivamente. En la misma figura se han marcado los ángulos exteriores. Estas rectas se intersecan por pares en I_1, I_2 e I_3.

Se analizará el caso de las bisectrices e_2 y e_3. Estas rectas son las bisectrices de los ángulos exteriores en los vértices B y C. La suma de estos dos ángulos es menor que cuatro rectos (corolario del teorema

1.7.2), por tanto los ángulos que forman estas bisectrices con BC en el semiplano que determina BC y que no contiene al vértice A, es menor que dos rectos y por tanto se intersecan en ese semiplano (Np5). Sea I_1 el punto de intersección. Pero análogamente se tiene que e_1 y e_3 se intersecan en el semiplano que determina AC y que no contiene a B. Por tanto e_3 interseca a e_1 y e_2 en puntos diferentes, ya que uno en está en una de las semirrectas determinadas por C y el otro en la otra semirrecta. Sea entonces I_2 la intersección de e_1 y e_3. Análogamente e_1 y e_2, se intersecan en un punto I_3 diferente de I_1 e I_2.

Sean Y', Y'' y Y''' los pies de las perpendiculares desde I_1 a los lados BC, CA y AB del triángulo, respectivamente.

I_1 está en la bisectriz del ángulo exterior en B ⇨ $IY' = IY'''$,

I_1 está en la bisectriz del ángulo exterior en C ⇨ $IY' = IY''$.

Por tanto $IY''' = IY''$ ⇨ I_1 está en la bisectriz del ángulo en A (problema 53, capítulo 1), pero como la bisectriz exterior en A no pasa por I_1, entonces está en la bisectriz interior del $\angle A$.

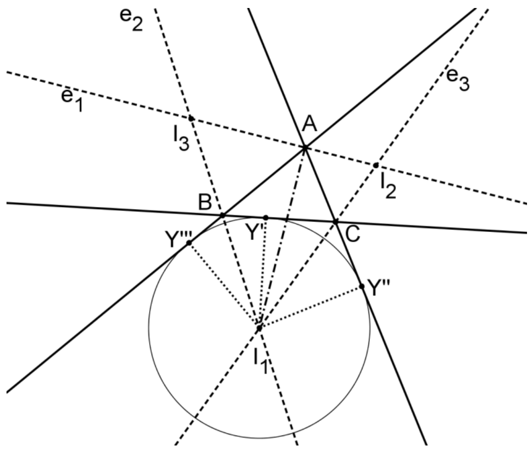


Figura 2.5

Ahora, ya que la distancia de I_1 a los tres lados del triángulo es la misma, el círculo con centro en I_1 con radio igual a esta distancia, pasa por los tres puntos Y', Y'' y Y'''. Más aún, ya que IY', IY'' e IY''' son perpendiculares a los lados del ΔABC, el círculo es tangente a los tres lados del triángulo en estos puntos (recíproco del teorema 1.14.3). A este círculo se le llama el excírculo del triángulo y a I_1 se le llama excentro del triángulo.

De manera análoga hay un círculo con centro en I_2, tangente a los tres lados del triángulo, y otro con centro en I_3, tangente también a los tres lados del triángulo. Estos dos círculos también se llaman excírculos y sus centros también se llaman excentros.

Integrando el resultado del inciso anterior, se puede decir entonces que las bisectrices interiores y exteriores de un triángulo pasan por tercias por cuatro puntos y que cada uno de estos puntos es centro de un círculo tangente a los tres lados del triángulo.

En la figura 2.6 se presentan los cuatro puntos, el incentro y los tres excentros, y los cuatro círculos, el incírculo y los tres excírculos.

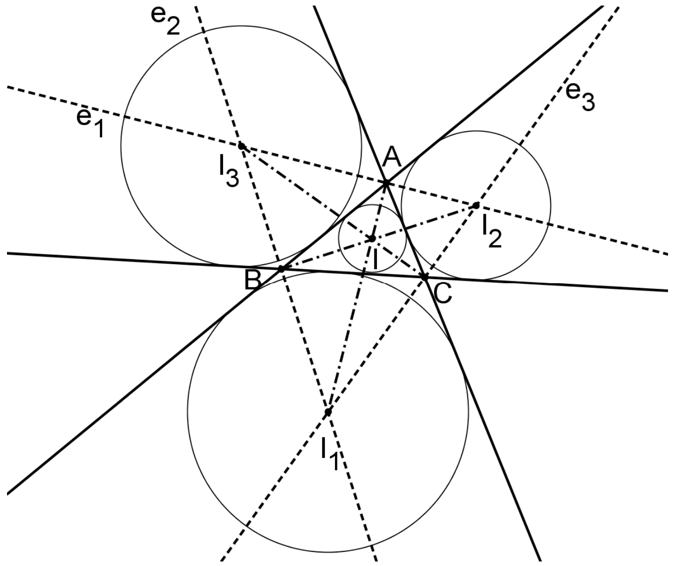


Figura 2.6

Se deja como ejercicio analizar si algunos de los puntos que se han revisado, están siempre dentro del triángulo o siempre fuera, y bajo qué condiciones están dentro o fuera, aquéllos que varían su posición relativa al triángulo.

En este capítulo se denotará como *O* al circuncentro, *G* al centroide, *H* al ortocentro, I al incentro, I_1, I_2 e I_3 a los excentros de un triángulo.

Problema 2.1.1

Dados tres puntos no colineales A, B y P, construir un triángulo que tengan como lado el segmento AB y donde P sea sucesivamente: su centroide, su ortocentro, su circuncentro, incentro o uno de sus excentros. Justifique su construcción y si en todos los casos tiene solución.

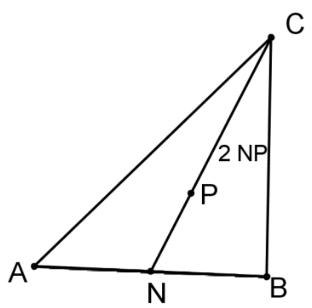


Figura 2.7

1) En el caso de que *AB* sea uno de los lados y se quiere que *P* sea el centroide, se traza *N* punto medio de *AB* y la recta *NP*.

   Se escoge sobre la recta *NP* un punto *C* tal que *PC* = 2*NP*. El triángulo *ABC* es el buscado.

   En el triángulo *ABC*, *CN* es la mediana por el vértice *C*, ya que *N* es el punto medio del lado *AB*. *P* es el centroide, ya que por construcción, *P* triseca la mediana *CN*.

El hecho de que el punto *P* es el centroide del triángulo garantiza que las rectas *BP* y *AP* son las medianas del triángulo.

2) En el caso de que *AB* sea uno de los lados y se quiere que *P* sea el ortocentro, se traza por *P* una perpendicular a *AB* y la recta *AP*.

   Se traza por *B* una perpendicular a *AP*. Sea C el punto de intersección de esta perpendicular por B con la perpendicular por P a AB. El triángulo *ABC* es el buscado.

   En el triángulo *ABC*, *CP* y *AP* son alturas, ya que por construcción son perpendiculares a los lados del triángulo, por tanto *P* es el ortocentro del triángulo.

   Este hecho asegura que *BP* es la tercera altura del triángulo.

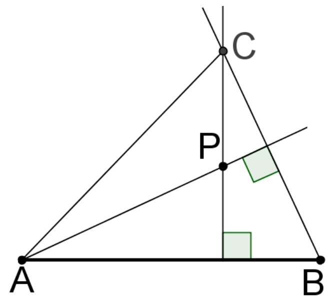


Figura 2.8

El resto de los casos se dejan para el lector.

Teorema 2.1.2

En un triángulo isósceles, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro son colineales.

Demostración:

Sea *ABC* un triángulo isósceles, donde *AB* = *AC*; *L*, *M* y *N* los puntos medios de sus lados; *E* y *F* los pies de las alturas. El pie de la altura *D* por el vértice *A* coincide con el punto medio *L* del lado *BC*.

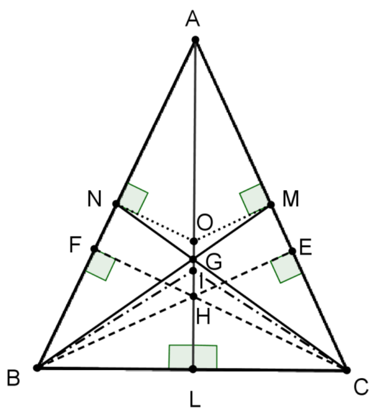


Figura 2.9

De acuerdo con el resultado del problema 35, la bisectriz, mediana y altura de la base *BC* del triángulo coinciden, por tanto el incentro (*I*), centroide (*G*) y ortocentro (*H*) del triángulo están sobre esta recta y son colineales.

Más aún, dado que la mediana y altura coinciden, entonces la mediatriz coincide también y el circuncentro del triángulo (*O*) está sobre esta recta.

Corolario:

En un triángulo equilátero, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro del triángulo coinciden.

2.2. Triángulos pedales

A los triángulos cuyos vértices son los pies de las medianas, alturas o bisectrices de un triángulo se les llama triángulos pedales del triángulo: triángulo pedal de las medianas, triángulo pedal de las alturas, triángulo pedal de las bisectrices. Al triángulo pedal de las medianas se le llama también triángulo mediano y al triángulo pedal de las alturas, triángulo órtico. Algunos autores cuando aluden simplemente al triángulo pedal, se refieren, en general, al órtico.

Teorema 2.2.1 Un triángulo ABC y su triángulo mediano LMN son semejantes y sus lados son paralelos. La razón de proporcionalidad entre ΔABC y ΔLMN es 2:1.

Este teorema se demostró en el capítulo 1 (problema 59).

Teorema 2.2.2

El radio del circuncírculo de un triángulo ABC es el doble del radio del circuncírculo de su triángulo mediano.

Demostración:

Sea ΔABC y ΔLMN su triángulo mediano. Se trazan las mediatrices de los lados AB y BC del triángulo. Sea O su punto de intersección. O es el circuncentro del ΔABC. Sean L' y N' los puntos medios de los lados NM y LM del triángulo mediano LMN. Se trazan las mediatrices por L' y N' del ΔLMN. Sea J su punto de intersección, entonces J es el circuncentro del ΔLMN. Se traza la recta $L'N'$.

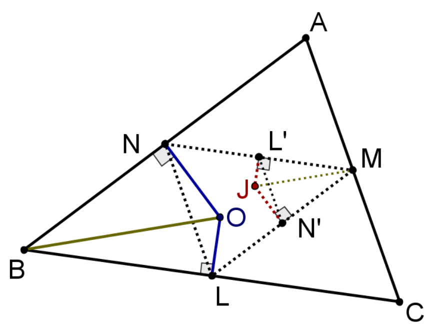


Figura 2.10

Se tiene que $L'N'$ es paralela a LN y $LN = 2L'N'$ (teorema 1.15.2). Se tiene además que $L'M$ es paralela a BL y $BL = 2ML'$; MN' es paralela a BN y $BN = 2MN'$ (teorema 2.2.1).Por lo tanto $\Delta L'N'M \approx \Delta LNB$ (teorema 1.9.5)y se tiene que

$$\angle BLN = \angle ML'N'$$

$$\angle BNL = \angle MN'L'.$$

Se tiene entonces que en $\Delta L'JN'$ y ΔLON,

$$\angle LNO = 90º - \angle BNL = 90º - \angle MN'L' = \angle L'N'J,$$

$$\angle NLO = 90º - \angle BLN = 90º - \angle ML'N' = \angle N'L'J,$$

por tanto, $\Delta L'JN' \approx \Delta LON$ (teorema 1.9.3) y $LO = 2L'J$, $NO = 2N'J$, ya que $LN = 2L'N'$.

Se trazan las rectas BO y MJ, que son los radios de los circuncírculos de ΔABC y ΔLMN respectivamente. Entonces, por el teorema 1.7.2, $\Delta L'JM \approx \Delta LOB$, ya que son rectángulos con los dos catetos proporcionales, respectivamente. Por tanto sus hipotenusas están en la misma proporción, de donde $BO = 2MJ$.

Teorema 2.2.3

Las alturas de un triángulo son las bisectrices de los ángulos del triángulo órtico.

Demostración:

Sea ABC un triángulo y AD, BE y CF sus alturas. El ΔDEF es el triángulo órtico del triángulo ABC. Se traza el círculo con diámetro AB. Este círculo pasa por los puntos D y F, ya que el $\angle ADB$ es recto y abarca el diámetro AB del círculo.

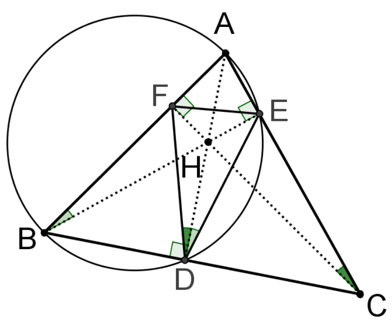


Figura 2.11

Análogamente, el $\angle AEB$ es recto y abarca también el diámetro AB del círculo (inciso c del problema 81 del capítulo 1). Ahora, $\angle ADE = \angle ABE$, ya que son inscritos y los dos abarcan el mismo arco AE (teorema 1.12.5).

Si se traza el círculo con diámetro AC, se demuestra de manera similar que $\angle ADF = \angle ACF$.

Considerando ΔACF y ΔABE, los dos tienen como ángulos al $\angle A$ y un ángulo recto, por tanto su tercer ángulo es igual (teorema 1.9.6). Por tanto:

$$\angle ABE = \angle ACF \Rightarrow \angle FDA = \angle ADE,$$

y AD es bisectriz de $\angle FDE$. De manera análoga se demuestra que BE es bisectriz de $\angle FED$ y CF de $\angle EFD$.

Teorema 2.2.4

Los cuatro puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo ABC, tienen la propiedad de cada uno de ellos es ortocentro del triángulo formado por los otros tres y todos estos triángulos tienen el mismo triángulo órtico.

La demostración se deja como ejercicio al lector.

Teorema 2.2.5

Dado un triángulo ABC, su triángulo mediano y su triángulo órtico tienen el mismo circuncírculo.

Demostración:

Sean ABC un triángulo, *L*, *M* y *N* los puntos medios de los lados *BC*, *CA* y *AB* respectivamente y sean *D*, *E* y *F* los pies de las alturas en estos mismos lados. Se demostrará, en primera instancia, que el circuncírculo del ΔLMN pasa por el punto *D*, pie de la altura por el vértice *A*.

Se trazan las rectas *NM*, *ML* y *ND*. Se tiene entonces que *NM* es paralela a *DL* y *NM* = *BL* (teorema 2.2.1), *ML* es paralela a *NB* y *ML* = *NB* (teorema 2.2.1), NB = ND (problema 7).

Entonces, el cuadrilátero *NDLM* es un trapecio isósceles y por tanto es inscriptible (problema 91 del capítulo 1). Esto es, el circuncírculo del ΔLMN, pasa también por el punto *D*, pie de la altura por el vértice *A*. De manera análoga se puede demostrar que este circuncírculo pasa también por los puntos E y F, con lo cual queda demostrado el teorema.

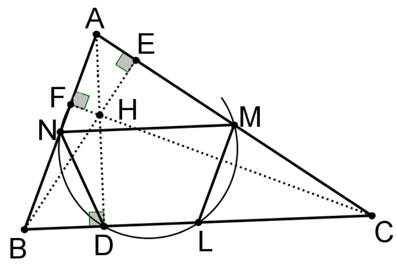


Figura 2.12

A esta circunferencia se le llamó inicialmente circunferencia de Euler (siglo XVIII), o circunferencia de Feuerbach (siglo XIX), o bien circunferencia de los seis puntos. En particular Feuerbach demostró que esta circunferencia es tangente a los excírculos y el incírculo del triángulo, demostración que se hará posteriormente.

En las figuras 2.13 y 2.14 se presenta la circunferencia de los "seis puntos" para un triángulo acutángulo y para un triángulo obtusángulo, respectivamente.

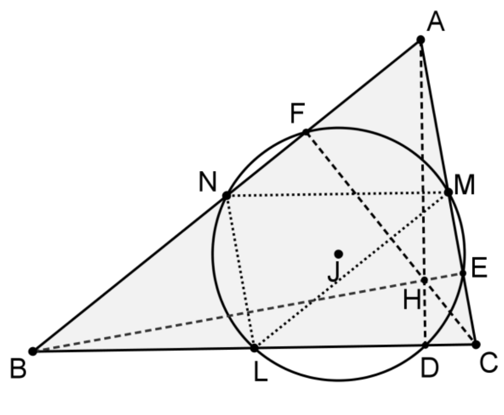


Figura 2.13

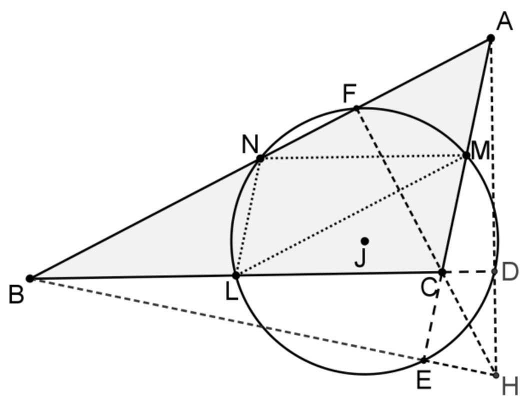


Figura 2.14

Los matemáticos Brianchon y Poncelet (siglo XVIII) demostraron que esta circunferencia pasa también por los puntos medios de los segmentos entre los vértices del triángulo y el ortocentro, llamados puntos de Euler. De ahí que actualmente se le conozca como "circunferencia de los nueve puntos". La demostración de este resultado también se hará posteriormente.

De acuerdo con el resultado del teorema 2.2.2 el radio del circuncírculo de un triángulo es el doble del radio del circuncírculo del triángulo mediano, o sea de la circunferencia de los nueve puntos.

2.3. La recta de Euler

En el teorema 2.1.2 se demostró que en un triángulo isósceles los puntos notables que se han considerado son colineales y que en un triángulo equilátero coinciden. En el caso de que los triángulos no sean isósceles o equiláteros, se puede entonces preguntar si bajo alguna otra condición son estos puntos colineales o al menos de alguna terna de ellos. Euler demostró que en todo triángulo no equilátero el circuncentro, centroide y ortocentro son colineales.

Teorema 2.3.1

En todo triángulo no equilátero ABC, el circuncentro, centroide y ortocentro son colineales y la distancia del ortocentro al centroide es el doble de la distancia del centroide al circuncentro.

Sea *ABC* un triángulo no equilátero, *L* y *M* los puntos medios de los lados *BC* y *CA* respectivamente. Sean *AL* y *BM* dos de sus medianas, por tanto su intersección *G* es el centroide del triángulo. Se construyen las mediatrices por *L* y *M*, su intersección *O* es el circuncentro del triángulo. Ya que el triángulo no es equilátero, *G* y *O* son distintos (problema 12).

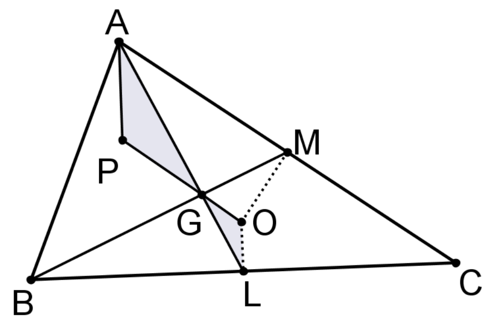


Figura 2.15

Se traza la recta *OG*. Se traza el punto *P* en la semirrecta de OG determinada por G que no contiene a *O* y tal que PG = 2OG. Por el teorema 1.9.4 los triángulos *APG* y *LGO* son semejantes, ya que,

$\angle AGP = \angle LGO$, por ser opuestos por el vértice,

$\frac{PG}{GO} = \frac{AG}{GL} = 2$, por construcción y teorema 2.1.1.

Luego, $AP = 2LO$, $\angle PAG = \angle OLG$ y $\angle GPA = \angle GOL$.

Por tanto, la recta *AP* es paralela *OL* y como *OL* es perpendicular a *BC*, también *AP* y por tanto *AP* es la altura por *A*.

Se traza ahora la recta *BP*. De manera análoga al caso anterior, se demuestra que $\Delta BPG \approx \Delta BOG$ y que la recta *BP* es paralela a *MO* y *BP* = 2*MO*. Por tanto, la recta *BP* es la altura por el vértice *B*. El punto *P* es por tanto el ortocentro del triángulo y queda demostrado el teorema.

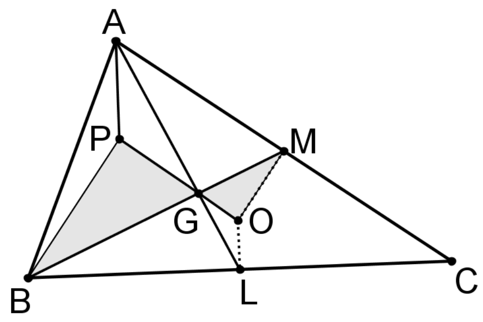


Figura 2.16

A esta recta se le conoce como la recta de Euler del triángulo.

Se puede observar que además se demostró que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del punto medio del lado opuesto al circuncentro.

Como se vio en el teorema 1.2.1, en el caso de los triángulos isósceles, la recta de Euler es la altura-mediana-mediatriz-bisectriz de la base del triángulo y ésta contiene también al incentro. Se puede demostrar que si el incentro está en la recta de Euler, el triángulo es isósceles.

Ejercicios:

1) *¿Cuáles de los siguientes puntos están siempre dentro del triángulo, cuáles siempre fuera? Establezca las condiciones para sus diferentes posiciones de aquéllos que no siempre están dentro o fuera.*

   Circuncentro, centroide, ortocentro, incentro, excentros, centro del círculo de los nueve puntos.

2) *Resuelva el problema 2.1.1, para los casos que no se resuelven en el texto.*

3) *Demuestre que la mediana que pasa por un vértice de un triángulo, biseca cualquier paralela al lado opuesto a ese vértice. Sugerencia: ver la demostración del teorema 1.9.6.*

4) *H es el ortocentro del ΔABC, la altura por A corta al lado opuesto en D y al circuncírculo en K. Demuestre que HD = DK.*

5) *Demuestre que el punto medio de un lado de un triángulo es también punto medio del segmento determinado por los puntos de contacto del incírculo y el excírculo correspondiente.*

6) *Demuestre que el área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro del triángulo por el radio del círculo inscrito y que también es igual al semiperímetro disminuido en un lado por el radio del excírculo correspondiente.*

7) *Demuestre que en cualquier triángulo rectángulo la mediana por el vértice del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.*

8) *Construir un triángulo dadas las longitudes de sus lados y de la mediana del tercer lado.*

9) *Demuestre que en cualquier triángulo el producto de los dos segmentos en que la altura es dividida por el ortocentro es constante para las tres alturas.*

10) *Demuestre que el triángulo formado por los excentros de un triángulo ABC es isósceles si y sólo si el triángulo ABC es isósceles.*

11) *Demuestre que los puntos en que la mediatriz de un lado de un triángulo corta al circuncírculo están en la bisectriz interior y exterior del ángulo opuesto.*

12) *Demuestre que si el circuncentro y el centroide de un triángulo coinciden, entonces el triángulo es equilátero.*

13) *Demuestre que el circuncentro de un triángulo ABC es ortocentro del triángulo mediano.*

14) *Demuestre el teorema 2.2.4.*

15) *Sean PX, PY y PZ las perpendiculares bajadas a los lados del triángulo ABC, desde cualquier punto P de su circuncírculo. Demuestre que los puntos X, Y y Z son colineales. A esta línea se le llama la "línea de Simson de P con respecto al triángulo ABC".*

16) *Demuestre que el ángulo entre las líneas de Simson de dos puntos P y P' en el circuncírculo del triángulo ABC es igual a un medio del arco PP'.*

3. Cuadriláteros cíclicos

3.1. Teorema de Ptolomeo

El teorema siguiente se debe a Claudio Ptolomeo, astrónomo y geógrafo griego de la Antigüedad (siglo II) y aparece en su obra principal conocida por su nombre árabe *Almagesto*[9].

El *Almagesto* es una enciclopedia del conocimiento astronómico de esa época, que establece la astronomía como una disciplina de las matemáticas. Esta obra, contiene una elaborada teoría del movimiento de planetas que se movilizan en círculos (epiciclos) que rotan sobre la circunferencia de un círculo mayor cuyo centro se encuentra sobre la Tierra (sistema geocéntrico). Aborda también la determinación de la distancia de la Luna a la Tierra, estudios sobre la esfera y trigonometría y un manual sobre la construcción y uso de los instrumentos astronómicos.

En la figura 1.49 se presenta un esquema de los epiciclos, donde *T* representa a la Tierra, *P* a un planeta y *E* un epiciclo.

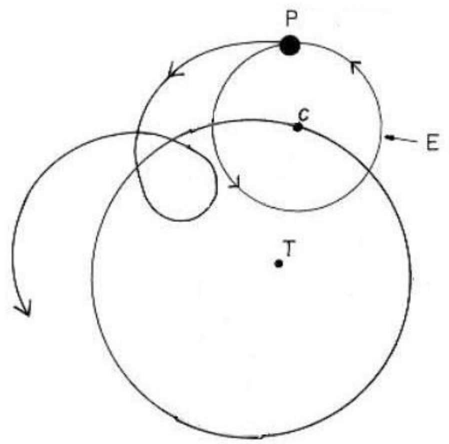


Figura 3.1

Teorema 3.1.1 (Teorema de Ptolomeo)

Un cuadrilátero es cíclico si y sólo el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos.

Recuerde que se dice que un cuadrilátero es *cíclico* si es *inscriptible* y se dice que sus vértices son *concíclicos*.

Demostración:

---

[9] Se han referido varios nombres como el original de esta obra: Megale Syntaxis (Gran Compendio), Syntaxis Mathematica (Compilación Matemática) (Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology, Smith William, 1867, Ancient Library, p. 570). (http://www.ancientlibrary.com/).

Supóngase que se tiene un cuadrilátero cíclico con vértices *A*, *B*, *C* y *D*. Sean *AC* y *BD* sus diagonales. Sean $\angle CAB = \alpha$ y $\angle BCA = \beta$.

Se traza una recta tal que forme con *AB* un ángulo $\alpha_1 = \alpha$ (ejercicio 7a). Sea *E* la intersección de esta con la diagonal *BD* (NP5).

Se tiene entonces por el teorema 1.9.3, que $\Delta DAE \cong \Delta CAB$, ya que $\alpha_1 = \alpha$, por construcción, y $\angle BCA = \angle BDA = \beta$, por ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco (teorema 1.11.3).

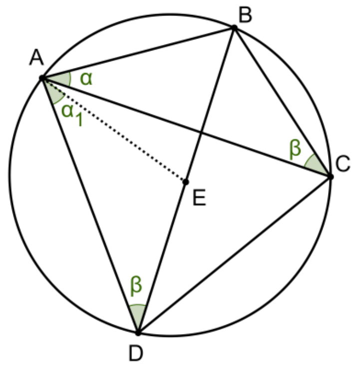


Figura 3.2

Por tanto:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow AD \times CB = AC \times DE.$$

Se tiene también que $\Delta ADC \cong \Delta AEB$, ya que $\alpha_1 + \gamma = \alpha + \gamma$, por construcción, y $\angle ABE = \angle ACD = \delta$, por ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco.

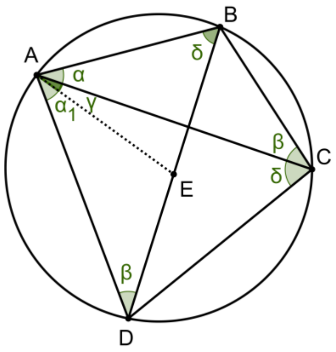


Figura 3.3

Por tanto:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC} \Rightarrow AB \times DC = AC \times EB.$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene que:

$$AD \times CB + AB \times DC = AC \times DE + AC \times EB,$$

de donde:

$$AD \times CB + AB \times DC = AC(DE + EB),$$

pero como *D*, *E* y *B* son colineales, se tiene que $(DE + EB) = DB$ y,

$$AD \times CB + AB \times DC = AC \times DB$$

¿Es válida esta demostración en el caso de que el ángulo α sea mayor que $\frac{1}{2}\angle DAB$?

3.2. Rectas Antiparalelas

Sean *a, b* y *c, d* dos pares de rectas de tal forma que la bisectriz *m* de las rectas *a* y *b* corta a las rectas *c* y *d* formando ángulos iguales interiores del mismo lado de la transversal, se dice que *c* y *d* son antiparalelas con respecto a las rectas *a* y *b.*

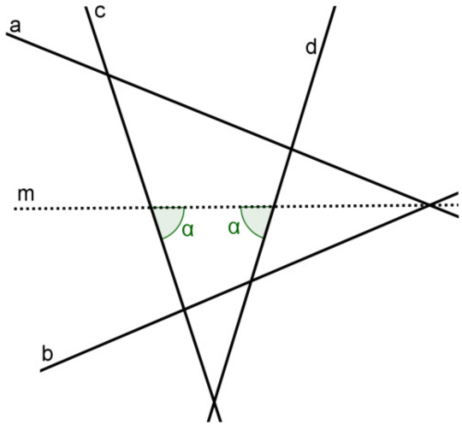


Figura 3.4

Teorema 3.2.1

Si las rectas c y d son antiparelas con respecto a las rectas a y b, entonces las rectas a y b son antiparalelas con respecto a las rectas c y d.

Demostración:

Sean las rectas *c* y *d* antiparalelas con respecto a las rectas *a* y *b*. Sea *O* el punto de intersección de *a* y *b*. Sea *O'* el punto de intersección de *c* y *d*. Sea *m* la bisectriz de *a* y *b* y sea *n* la bisectriz de *c* y *d.* Sean *A* y *B* las intersecciones de *m* con *a* y *b* respectivamente y sean *C* y *D* las intersecciones de *n* con *c* y *d* respectivamente.

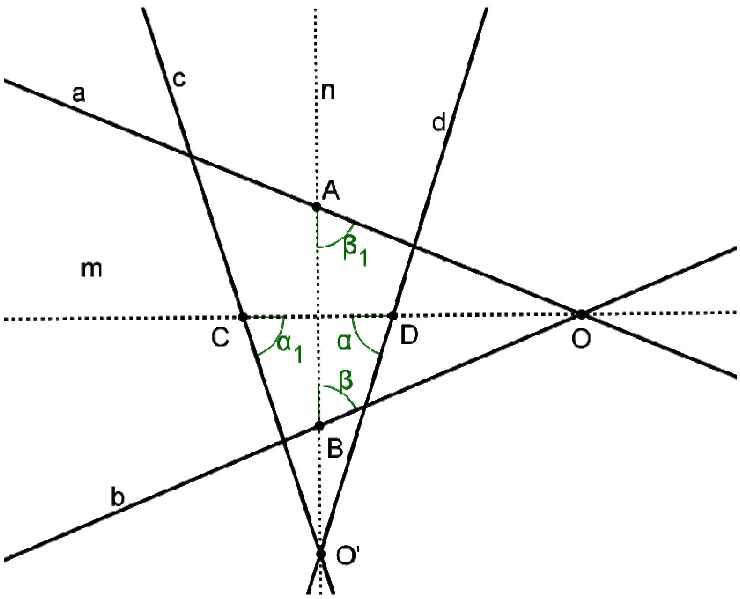


Figura 3.5

Sea α el ángulo formado por *m* y *d* y sea α_1 el formado por *m* y *c*. Por la definición de antiparalelas se tiene que $\alpha = \alpha_1$, por tanto el $\Delta O'CD$ es isósceles, problema 34 del capítulo 1. Por tanto la bisectriz *n* de *c* y *d* es altura del lado *CD* y por tanto perpendicular a *m,* problema 35 del capítulo 1*.* Se tiene entonces que la bisectriz *m* es también altura del ΔOAB y por tanto el triángulo es isósceles, problema 37 del capítulo, de donde $\beta = \beta_1$, de donde *a* y *b* son también antiparalelas con respecto a *c* y *d*.

Ejercicios:

1) *Demuestre que dos triángulos rectángulos son semejantes si:*
   a) *Tienen igual uno de sus ángulos agudos.*
   b) *Sus catetos son proporcionales.*
   c) *La hipotenusa y un cateto son proporcionales.*
2) *Sea C un círculo con centro en O. Sea P un punto cualquiera exterior al círculo. Encuentra el lugar geométrico de los puntos Y tales que Y es el punto medio del segmento PX, para X en C.*
3) *Verifique la demostración del Teorema de Ptolomeo en el caso de que* el *ángulo* α *sea mayor que* $\frac{1}{2}\angle DAB$*.*
4) *Verifique numéricamente el Teorema de Ptolomeo para cada uno de los siguientes cuadriláteros inscritos en una circunferencia cuyo radio es la unidad:*
   a) *Un cuadrado.*
   b) *Un trapecio isósceles uno de cuyos lados es un diámetro y sus otros tres lados son iguales.*
   c) *Un rectángulo cuyas dimensiones están en la relación 1:2.*
5) *Demuestre que al aplicar el Teorema de Ptolomeo a un rectángulo, se obtiene el Teorema de Pitágoras.*
6) *Demuestre que en cualquier cuadrilátero la suma de los productos de los lados opuestos es mayor o igual que el producto de sus diagonales.*
7) *Demuestre el inverso del Teorema de Ptolomeo.*
8) *Demuestra que si dos rectas a y b que son antiparalelas con respecto a las rectas c y d, las cortan en cuatro puntos distintos formando un cuadrilátero convexo, estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrilátero cíclico. Inversamente, cada par de lados opuestos en un cuadrilátero cíclico convexo es antiparalelo con respecto al otro par.*

9) *Demuestra que las bisectrices de los dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares.*

10) *Demuestra que los lados no paralelos de un trapecio son antiparalelos con respecto a los lados paralelos.*

11) *Demuestra que si ABC es un triángulo, C el circuncírculo de ABC. Una recta paralela a la tangente al circuncírculo en A, por un punto P en BC es antiparalela al lado BC con respecto a AB y AC.*